Sicurezza Strutturale – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

☑ Obiettivi del corso

Il corso intende:

- Introdurre i concetti fondamentali di statistica e sicurezza strutturale.

- Far comprendere i principi delle Norme Tecniche per le Costruzioni (NTC18), in vigore in Italia, che regolano la progettazione strutturale.

IT Introduzione alle Norme Tecniche Italiane

Affidabilità e sicurezza

- Affidabilità: capacità della struttura di soddisfare determinati requisiti prestazionali per un dato periodo di tempo. Espressa in forma probabilistica.

NTC18

- Le Norme Tecniche per le Costruzioni (NTC18), approvate con DM 17 gennaio 2018, hanno valore di legge.

- Regolano progetto, esecuzione, collaudo e requisiti di resistenza meccanica, stabilità, durabilità, anche in caso di incendio.

📜 Contenuti principali delle NTC18

Principi generali

- Le norme definiscono le azioni da considerare, le caratteristiche dei materiali e i criteri di progetto e sicurezza.

Riferimenti

- Si può fare riferimento anche agli Eurocodici e ai relativi documenti tecnici.

- Esiste una circolare esplicativa delle NTC18.

⚖️ Sicurezza e prestazioni attese

Le strutture devono essere progettate in modo:

- Economicamente sostenibile
- Sicuro rispetto agli stati limite:
- Ultimi (SLU): perdita di equilibrio, collasso, ecc.
- Esercizio (SLE): deformazioni, vibrazioni, degrado, ecc.

🔁 SLU = irreversibili | SLE = talvolta reversibili

⏳ Vita nominale di progetto

Tipo costruzione	Vita nominale (anni)
Temporanee e provvisorie	10
Prestazioni ordinarie	50
Prestazioni elevate	100

🧱 Stati Limite Ultimi (SLU)

Condizioni che causano collasso o perdita di funzionalità:

- Equilibrio compromesso
- Deformazioni eccessive
- Cedimenti nei collegamenti o nel terreno
- Fatica o effetti dipendenti dal tempo
- Instabilità locale o globale

🧩 Stati Limite di Esercizio (SLE)

Condizioni che causano danni funzionali o estetici:

- Fessurazioni, spostamenti
- Vibrazioni

- Corrosione, degrado

- Compromissione elementi non strutturali

💧 Requisiti aggiuntivi

Sicurezza antincendio

Garantire stabilità durante l'incendio, evitare propagazione.

Durabilità

Progetto e manutenzione adeguata per evitare degrado:

- Scelta materiali, dettagli costruttivi

- Protezioni, ispezionabilità, sistemi di controllo

Robustezza

Capacità della struttura di resistere a eventi eccezionali (urti, esplosioni):

- Forme strutturali ridondanti e duttili

- Progettazione a tolleranza di danni localizzati

🔍 Verifiche

Ogni struttura va verificata per:

- SLU: stabilità strutturale

- SLE: funzionalità e aspetto

- Effetti termici (incendi)

Devono essere documentate in progetto con dati su:

- Materiali

- Caratteristiche geotecniche del terreno

Statistica

Concetti base:

- Popolazione e campione
- Media: somma valori diviso numero
- Deviazione standard: dispersione dei dati
- Frattile k%: valore sotto il quale si trova il k% dei dati

Istogrammi

Grafico che rappresenta la frequenza dei dati in intervalli.

Metodo semiprobabilistico

Obiettivo

Progettare strutture sicure con probabilità di collasso molto piccola. La sicurezza assoluta non è possibile.

Valori accettabili di probabilità di fallimento (pf)

Persone a rischio	Conseguenze gravi	pf accettabile
Bassa	Sì	10^{-5}
Media	Sì	10^{-6}
Alta	Sì	10^{-7}

Metodo semiprobabilistico – Verifiche

SLU

Verifica: $R_d \geq E_d$

- Rd: resistenza di progetto = X_k / γ_M
- Ed: azione di progetto = $\gamma_F \times F_k$

SLE

Verifica: Cd ≥ Ed

- Cd: valore limite ammissibile

- Ed: effetto delle azioni

📌 Valori caratteristici

- Xk: resistenza, frattile 5%

- Fk: azione, frattile 95%

📓 Esempio pratico – Gancio per lampadario

1. Misura delle resistenze di 100 ganci → si ottiene Xk (5% dei valori)

2. Misura dei pesi di 100 lampadari → si ottiene Fk (95% dei valori)

3. Si applicano i coefficienti:

- Fd = γF × Fk con γF = 1,3

- Xd = Xk / γM con γM = 1,15

4. Verifica soddisfatta se Xd ≥ Fd

❄ Esempio reale: carico neve a Torino

Altitudine: 239 m

Formula: qs = qsk × μi × CE × Ct

Calcolo: qs = 1,23 kN/m^2

📐 Esercizio finale

Dati:

- Rk = 22 kN

- γM = 1,15

- γF = 1,3

Verifica:

- $R_d = 22 / 1.15 = 19{,}1$ kN

- $19{,}1 \geq 1{,}3 \times F_k \rightarrow F_k \leq 14{,}7$ kN

🟦 Approfondimento: Metodo probabilistico

Distribuzioni gaussiane:

- Frattile 5%: $\mu - 1.645\sigma$

- Frattile 95%: $\mu + 1.645\sigma$

Esempio:

- Azione: $\mu = 50$, $\sigma = 21.96$

- Resistenza: $\mu = 91.65$, $\sigma = 3.35$

Confronto tra approccio probabilistico e semiprobabilistico:

- In pratica si preferisce il semiprobabilistico: più semplice, ma calibrato per garantire un rischio accettabile.

Teoria della Trave – Cinematica – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

Introduzione

Scopo della lezione: fornire le nozioni necessarie a comprendere le relazioni tra gli spostamenti della linea d'asse e le caratteristiche deformative (equazioni cinematiche).

Ipotesi di lavoro

Problema piano con carichi nel piano (y, z).
Sezione trasversale simmetrica rispetto all'asse y.
La deformata resta nel piano yz.
- Spostamenti w, v piccoli → linearizzazione
- Rotazioni $\phi \approx$ pendenza della deformata
- L'elemento dz resta rettilineo (trascurata la curvatura)
- L'allungamento trascurando la rotazione

Deformazioni elementari

Deformazioni principali di un segmento h:
- Longitudinale (dilatazione)
- Scorrimento angolare (taglio)
- Rotazione rigida
- Curvatura

Si analizza la trave dividendo in segmenti e facendo $h \to 0$.

Deformazione longitudinale

$\varepsilon_0 = \Delta w / h$
Per $h \to 0$, si ha:
$\varepsilon_0(z) = \lim_{h\to 0} [w(z+h) - w(z)] / h = w'(z) = dw/dz$

Spostamenti trasversali

Lo spostamento lungo y è la somma di:
- Deformazione da taglio γ
- Rotazione rigida ϕ
- Curvatura χ

Deformazione trasversale e rotazione rigida

Deformazione da taglio: $\Delta v_s = +h \sin(\gamma)$

Rotazione rigida: $\Delta v_r = -h \sin(\phi)$ (negativa se ϕ antioraria)

Curvatura

Curvatura: $\chi = 1 / R = \Delta\phi / h$

$\Delta v c = -[R - R \cos(\Delta\phi)] = -(1 - \cos(\chi h)) / \chi$

Curvatura e deformazione

$\varepsilon(y) = \varepsilon_0(z) + \chi y$

Dove:

- ε_0 è la deformazione dell'asse ($y=0$)

- χy rappresenta la variazione dovuta alla curvatura

Deformazione totale

$\Delta v = \Delta v_s + \Delta v_r + \Delta v c = h \sin\gamma - h \sin\phi - (1 - \cos(\chi h))/\chi$

Per $h \to 0$:

$v'(z) = \sin\gamma(z) - \sin\phi(z)$

Usando la regola di l'Hôpital: $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)/x = 0$

Spostamenti e rotazioni infinitesime

Se γ, ϕ sono piccoli: $\sin\gamma \approx \gamma$, $\sin\phi \approx \phi$

$v'(z) = \gamma(z) - \phi(z) \Rightarrow \gamma(z) = v'(z) + \phi(z)$

$\chi(z) = d\phi(z)/dz$

🔗 Equazioni cinematiche

Relazioni fondamentali:

$\varepsilon_0(z) = dw/dz$
$\gamma(z) = dv/dz + \phi(z)$
$\chi(z) = d\phi/dz$

Modelli:
- Timošenko: $\gamma(z) \neq 0$
- Eulero-Bernoulli: $\gamma(z) = 0 \Rightarrow \phi(z) = -dv/dz$

🧑‍🏫 Storici della teoria

Leonhard Euler (1707–1783)
Jakob Bernoulli (1655–1705)
Stepan Timošenko (1878–1972)

📏 Dimensioni fisiche

Grandezza	Dimensione	Unità SI
ε, ε_0, γ	–	–
χ	L^{-1}	m^{-1}
v, w	L	m
ϕ	–	rad

➕ Convenzioni di segno

- v, w positivi: concordi con y, z
- ε, ε_0 positivi: concordi con z
- ϕ positivo: rotazione antioraria
- χ positivo: concavità verso sinistra dell'asse z

🖐️ Sistema di riferimento

Regola della mano destra:
1. Dita verso X
2. Ruotare verso Y
3. Pollice indica Z

Teoria della Trave – Equilibrio – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

📘 Introduzione

Scopo della lezione: trattare le relazioni tra carichi esterni e caratteristiche della sollecitazione, ovvero le equazioni di equilibrio.

📏 Equilibrio della trave

Si studia una trave soggetta a carichi distribuiti:

- $q(z)$: perpendicolari all'asse z

- $p(z)$: paralleli all'asse z

Internamente la trave reagisce con:

- $N(z)$: forza assiale

- $T(z)$: forza di taglio

- $M(z)$: momento flettente

⚖️ Equazioni di equilibrio

Su un tratto infinitesimo dz si applicano le condizioni di equilibrio:

1. Direzione z:

$dN(z)/dz = -p(z)$

2. Direzione y:

$dT(z)/dz = -q(z)$

3. Momento rispetto a K:

$dM(z)/dz = T(z)$

Equazione differenziale finale:

$d^2M(z)/dz^2 = -q(z)$

Equivalenze con notazione:

- $N \equiv N_z$
- $T \equiv T_y$
- $M \equiv M_x$

Dimensioni fisiche

Grandezza	Dimensione	Unità SI
N, T	Forza (F)	N
M	Momento	N·m
q, p	Forza/metro	N/m

Convenzioni di segno

- q, p positivi: verso positivo degli assi
- N positivo: trazione
- T positivo: ruota in senso orario
- M positivo: disegnato sul lato delle fibre tese

Teoria della Trave – Equazioni Costitutive – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

Introduzione

Scopo della lezione: fornire le informazioni necessarie a comprendere le relazioni tra le caratteristiche della sollecitazione e le deformazioni per la trave, cioè, le equazioni costitutive globali.

Esperimenti su materiali

• Trazione su acciaio: si osservano comportamento elastico, plastico e rottura.
• Strizione: restringimento della sezione in zona plastica prima della rottura.
• Compressione su calcestruzzo: comportamento fragile, rottura improvvisa.
• Flessione su calcestruzzo armato: mostra l'interazione acciaio-calcestruzzo.

Legame elastico lineare – La molla

Il legame elastico è:
1. una relazione univoca tra sollecitazione e deformazione,
2. completamente reversibile: rimuovendo la forza, la deformazione scompare.

Nel caso elastico lineare: $F = K \cdot \delta$ (legge di Hooke)

Equazioni costitutive lineari elastiche

Relazione generale: $d(z) = S(z) / K$

Tabella di riferimento:

Caratt. sollecitazione	Deformazione	Rigidezza
N	ε_0	KA,e = EA
T	γ	KS,e = GAT
M	χ	KB,e = EIx

Dove:

- KA,e: rigidezza assiale

- KS,e: rigidezza a taglio

- KB,e: rigidezza flessionale

📐 Formule esplicite

$\varepsilon_0(z) = N(z) / EA$
$\gamma(z) = T(z) / GAT = t \cdot T(z)/GA$
$\chi(z) = M(z) / EIx$

La rigidezza dipende da:
- materiale (E, G)
- sezione trasversale (A, Ix, AT = A/t)

🧮 Proprietà geometriche e del materiale

Proprietà della sezione:
- A: area
- Ix: momento d'inerzia
- t: coefficiente di taglio ($t > 1$) → AT = A/t

Proprietà del materiale:
- E: modulo di elasticità (Young)
- G: modulo di elasticità tangenziale

⚙️ Rigidezza: materiale e forma

Caso 1: stesso profilo, materiali diversi
- Acciaio (E = 210 GPa) molto rigido
- Gomma (E ≈ 0,1 GPa) molto deformabile

Caso 2: stesso materiale, sezioni diverse
- Ix dipende da geometria:
- $Ix = bh^3/12$ (asse orizzontale)
- maggiore h → maggiore rigidezza flessionale

👨‍🔬 Robert Hooke – Ut tensio, sic vis

Robert Hooke (1635–1703)
Legge di Hooke: *Ut tensio, sic vis* – "Come la deformazione, così la forza"

Cosa serve a Nòlian?

- Per i calcoli strutturali servono E e G del materiale:
- Per materiali noti (acciaio, legno): dati standard
- Per materiali innovativi (X-LAM, bamboo): cercare in banche dati (es. The Wood Database)

- Per la sezione:
- Immaginare forme ottimali per la rigidezza flessionale (più alte, con maggiore Ix)

Dimensioni fisiche

Grandezza	Dimensione	Unità SI
E, G	FL^{-2}	Pa
A	L^2	m^2
Ix	L^4	m^4
t	–	–
KA,e, KS,e	F	N
KB,e	FL^2	Nm^2

Autovalutazione

Domande di autovalutazione disponibili sulla Piattaforma Exercise (attivabile da Moodle).
Modulo di feedback disponibile tramite QR code o link fornito a lezione.

Teoria della Trave – Proprietà Geometriche delle Sezioni – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

Introduzione

Si studiano proprietà geometriche di aree piane rilevanti per la teoria della trave.
A compaiono nei termini EA (rigidezza assiale) e EIx (rigidezza flessionale), dove A è l'area della sezione e Ix (meglio Iξ) il momento d'inerzia principale.

Momenti statici e baricentro

Formule:
- Area: $A = \int_A dA$
- Momenti statici: $S_x = \int_A y\, dA$, $S_y = \int_A x\, dA$
- Baricentro: $x_G = S_y / A$, $y_G = S_x / A$

Proprietà:
- Il baricentro annulla i momenti statici.
- Momenti statici nulli per assi passanti per il baricentro.

Momenti d'inerzia

Definizioni:
- $I_{xx} = \int_A y^2\, dA$
- $I_{yy} = \int_A x^2\, dA$
- $I_{xy} = \int_A x\, y\, dA$

Proprietà:
- $I_{xx}, I_{yy} \geq 0$
- Ixy (momento centrifugo) può essere >, < o = 0

Trasposizione dei momenti d'inerzia

Leggi di Huygens:
- $I_{xx} = I_{xGxG} + A\, y_0^2$
- $I_{yy} = I_{yGyG} + A\, x_0^2$
- $I_{xy} = I_{xGyG} + A\, x_0\, y_0$

IxGxG e IyGyG sono i minimi tra gli assi paralleli.

Sistema di riferimento principale

Si può trovare un sistema (ξ, η) in cui $I\xi\eta = 0$ ruotando gli assi di un angolo θ rispetto a quelli baricentrici.

Formule:
- $\theta = \frac{1}{2} \arctan[2\ IxGyG / (IyGyG - IxGxG)]$
- $I\xi, I\eta = \frac{1}{2}(IxGxG + IyGyG) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[(IyGyG - IxGxG)^2 + 4\ IxGyG^2]}$

Note:
- Se $IxGxG = IyGyG \Rightarrow \theta = \pi/4$
- $I\xi\eta = 0$ nel sistema principale
- $I\xi$ e $I\eta$ sono sempre > 0

Sezione rettangolare

Calcoli:
- $A = b \cdot h$
- Baricentro: $xG = b/2$, $yG = h/2$
- $Ixx = (b\ h^3)/3 \rightarrow IxGxG = (b\ h^3)/12$
- $Iyy = (h\ b^3)/3 \rightarrow IyGyG = (h\ b^3)/12$
- $Ixy = 0$ per simmetria

Conclusione:
La sezione rettangolare è doppiamente simmetrica: $\vartheta = 0$, $IxGyG = 0$.

Sezioni composte

Procedura:
1. Dividere in n aree semplici (note da prontuari).
2. Sommare le aree → A totale.
3. Calcolare Sx, Sy totali rispetto a un sistema arbitrario.
4. Trovare il baricentro.
5. Trasportare i momenti d’inerzia al sistema globale.
6. Calcolare θ, $I\xi$, $I\eta$.

Attenzione a:
- versi degli assi locali/globali
- uso corretto del teorema di Huygens

Simmetrie particolari

- Simmetria assiale: baricentro su asse, un asse principale coincide.
- Simmetria polare: baricentro coincide con il centro dell'area.

Attenzione:

- Alcune figure possono trarre in inganno: occhio ai versi degli assi.

Esercizio risolto

Dati:

- Tre aree elementari con dimensioni e posizioni.
- Si calcolano: xG, yG, IxGxG, IyGyG, IxGyG

Esempio risultato:

- xG = 1.553a
- yG = 1.239a
- IxGxG = $4.119a^4$, IyGyG = $5.361a^4$, IxGyG = $0.843a^4$
- $\theta = +26.8°$
- $I\xi = 3.693a^4$, $I\eta = 5.787a^4$

Sezione a L e altri esempi

Esercizio: sezione a L composta

Caso particolare:

- Due IPE 240 saldate
- Travi alleggerite: esempio di ottimizzazione geometrica

Gara tra sezioni

Attività proposta:

- Assemblare quattro sezioni a L
- Valutare quella con maggiore momento d'inerzia
- Costruirla, testarla, confrontare rigidità

Dimensioni fisiche

Grandezza	Dimensione	Unità SI
xG, yG	L	m
A	L^2	m^2
Sx, Sy	L^3	m^3
Ixx, Iyy, Ixy	L^4	m^4
IxGxG, IyGyG	L^4	m^4
Iξ, Iη	L^4	m^4

Teoria della Trave – Spostamenti Trasversali (Linea Elastica) – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

Introduzione

È spesso necessario valutare gli spostamenti indotti dai carichi, per esempio:
• in fase di progetto → verifica SLE (Stato Limite di Esercizio) per deformazione eccessiva
• in fase di collaudo → verificare che la struttura rimanga entro i limiti elastici

Obiettivo: sviluppare un modello per calcolare $v(z)$, cioè la freccia, dato:
• lunghezza trave
• sezione e materiale
• carichi e vincoli

Ipotesi

1. L'asse della trave è rettilineo, carico distribuito ortogonale e continuo.
2. Spostamenti e rotazioni sono piccoli.
3. Deformazione di taglio trascurabile.
4. Sezione costante e simmetrica rispetto al piano verticale.
5. Comportamento elastico lineare.

Curvatura: $\chi = M / (EI)$

Inclinazione e curvatura

• Inclinazione φ: angolo della tangente con l'asse z (positivo antiorario).
• Curvatura χ: $1/R$, positiva se concavità rivolta verso valori negativi dell'asse y.

Per piccole rotazioni:
$\phi(z) = -v'(z)$, $\chi(z) = -v''(z)$

🧮 Equazione differenziale del secondo ordine

$\chi(z) = M(z) / (EI) \rightarrow d^2v/dz^2 = -M(z)/(EI)$

Serve:
- calcolare prima $M(z)$
- 2 integrazioni
- 2 condizioni al contorno (su spostamento e rotazione)

Condizioni:
- se spostamento impedito: $v = 0$
- se rotazione impedita: $v' = 0$

🧮 Equazione differenziale del quarto ordine

Dalla derivazione:
$d^4v/dz^4 = q(z)/(EI)$

Permette:
- calcolo diretto di $v(z)$ da $q(z)$
- 4 integrazioni
- 4 condizioni al contorno

Condizioni statiche:
- $M = -EI \cdot v'' \rightarrow M$ nullo $\Rightarrow v'' = 0$
- $T = -EI \cdot v''' \rightarrow T$ nullo $\Rightarrow v''' = 0$

🧪 Esempio 1 – Trave appoggiata + carico uniforme

$M(z) = qLz/2 - qz^2/2 \rightarrow d^2v/dz^2 = -M(z)/(EI)$

Doppia integrazione:
$v(z) = 1/(EI) \cdot (qz^4/24 - qLz^3/12 + qL^3z/24)$

$v_C = v(L/2) = (5/384) \cdot (qL^4)/(EI)$
$\phi_A = -v'(0) = -(1/24) \cdot (qL^3)/(EI)$

🧪 Esempio 2 – Stesso caso con 4° ordine

$q0$ costante → $d^4v/dz^4 = q0/(EI)$

4 integrazioni → 4 costanti (C1–C4)
Condizioni:
$v(0) = v(L) = 0$, $v''(0) = v''(L) = 0$

Risultato:
$v(z) = (q0z / 24EI)\cdot(z^3 - 2Lz^2 + L^3)$

$vC = 5/384 \cdot q0L^4 / (EI)$
$\phi A = -v'(0) = -1/24 \cdot q0L^3 / (EI)$

🧪 Esempio 3 – Trave incastro + appoggio

Condizioni:
- $v(0) = v'(0) = 0$
- $v(L) = v''(L) = 0$

Risultato:
$v(z) = qz^4/24EI - (5qLz^3)/(48EI) + (qL^2z^2)/(16EI)$

Momento max: $M = -qz^2/2 + 5qLz/8 - qL^2/8$
Taglio: $T = -qz + 5qL/8$

Trave iperstatica: 4 incognite, 3 eq. equilibrio ⇒ serve compatibilità.

🧪 Esempio 4 – Trave reale

IPE 200 tra 2 appoggi, $L = 6$ m, $q = 220$ N/m

$E = 210$ GPa, $Ix = 1943\ cm^4 = 1943\times10^{-8}\ m^4$

$v = (5/384)\cdot(qL^4)/(EI)$ = circa 0.00091 m = ~1 mm

🛠 Progetto per deformabilità

SLE: $v \leq v_{lim}$ → progetto con limite di spostamento

$I_x \geq (5/384) \cdot (qL^4)/(E \cdot v_{lim})$

Esempio passerella 18 m, v_{lim} = 18/400 = 4.5 cm
q_d = 10.5 kN/m → $I_x \geq$ 152 000 cm^4
Sezione usata: 700 WB 150 (I_x = 171 000 cm^4)

Teoria della Trave – Stabilità dell’Equilibrio – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

Introduzione

Confronto tra stabilità di aste snelle, gusci sottili (es. lattina) e rotaie ferroviarie.
La perdita di forma rettilinea è effetto dell’instabilità sotto compressione.

Trazione e compressione

Trazione: l’asta rimane rettilinea fino alla rottura.
Compressione: oltre un certo N, si possono generare configurazioni inflesse.

Tipi di equilibrio

- Stabile: il sistema ritorna alla configurazione iniziale dopo una perturbazione.
- Instabile: deviazioni crescenti dopo perturbazioni.
- Indifferente: infinite configurazioni di equilibrio (es. piano orizzontale senza attrito).

Elasticità concentrata – struttura semplice

Sistema: asta rigida con molla torsionale ($M = k\phi$), forza F, lunghezza L.

Equilibrio: $H = 0$, $V = F$, $M = FL \cdot \sin(\phi) = k \cdot \phi \Rightarrow (k/FL) \cdot \phi = \sin(\phi)$

Stabilità:
- Una soluzione: $\phi = 0$ se $F < k/L$
- Tre soluzioni: $\phi = 0, \pm\phi^*$ se $F > k/L$ (biforcazione dell’equilibrio)

Biforcazione dell’equilibrio

Carico critico: $Fcr = k/L$
- $F < Fcr \rightarrow$ solo $\phi = 0$
- $F > Fcr \rightarrow$ anche $\phi = \pm\phi^*$

Percorso con imperfezione iniziale $\varphi_0 \rightarrow$ soluzione biforcata stabile.

🔁 Altra struttura semplice

Con molla lineare ($F_s = kL \cdot \sin\phi$): equilibrio = $FL \cdot \sin\phi = kL \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi \Rightarrow F = k \cdot \cos\phi$

Anche qui: carico critico $F_{cr} = k$
Configurazioni: rette o biforcate secondo il valore iniziale ϕ_0.

🔄 Arco ribassato – Snap through

Sistema ad arco: $F - 2N_{AB} \cdot \sin\phi = 0$ con N_{AB} funzione di ϕ

Fenomeno: superata una soglia ϕ_C, il sistema "scatta" da una configurazione all'altra (snap-through).

🌐 Elasticità distribuita – Trave compressa

Trave lunga soggetta a carico di compressione F.

Equilibrio deformato:
- $M(z) = F \cdot v(z)$
- Equazione: $d^2v/dz^2 = -M(z)/EI = -F \cdot v(z)/EI$

Forma: $d^2v/dz^2 + (F/EI) \cdot v(z) = 0$

🧮 Soluzione dell'equazione

Soluzione generale: $v(z) = C1 \cdot \sin(\sqrt{(F/EI)} \cdot z) + C2 \cdot \cos(\sqrt{(F/EI)} \cdot z)$

Condizioni:
- $v(0) = 0 \rightarrow C2 = 0$
- $v(L) = 0 \rightarrow \sin(\sqrt{(F/EI)} \cdot L) = 0 \Rightarrow F = (n\pi)^2 \cdot EI/L^2$

Primo valore critico: $F_{cr} = \pi^2 \cdot EI/L^2$

📊 Carico critico e deformate

Esistono infinite soluzioni (forme sinusoidali), ognuna per un valore F_n.

Carico critico: $F_{cr} = \min\{F_1, F_2, F_3, ...\}$
Deformata corrispondente: prima configurazione inflessa possibile.

Lunghezza libera d'inflessione

$Fcr = \pi^2 \cdot EI/L_0^2$

L_0: distanza tra punti di flesso successivi. Dipende dai vincoli:

Esempi:
- incastro-incastro → $L_0 = L$
- incastro-libero → $L_0 = 2L$

Esempi deformate e Fcr

Confronti tra Fcr per diversi vincoli:
- $L_0 = L/2 \rightarrow Fcr = 4\pi^2 \cdot EI/L^2$
- $L_0 = 2L \rightarrow Fcr = \pi^2 \cdot EI/4L^2$

Telaio shear-type

Travi con controventatura impediscono sbandamento orizzontale.

Confronto:
- $L_0 = L \rightarrow Fcr = \pi^2 \cdot EI/L^2$
- $L_0 = L/2 \rightarrow Fcr = 4\pi^2 \cdot EI/L^2$

Piano di inflessione

Il carico critico dipende dal piano di inflessione (Ix o Iy).

$Fcr = \pi^2 \cdot E \cdot Imin / L_0^2$, dove Imin è il minimo tra Ix e Iy nel piano più debole.

Snellezza

$\lambda = L_0 / \rho x$, con $\rho x = \sqrt{(Ix/A)}$

$Fcr = \pi^2 \cdot E \cdot A / \lambda^2$

⇒ Snellezza elevata = minor carico critico.

Crisi per instabilità o compressione

Due tipi di crisi:
- Travi snelle: instabilità elastica
- Travi tozze: compressione (snervamento)

Con snellezze intermedie → zona di transizione.

Esempio rotaia UIC 60

Dati: $A = 77\ cm^2$, $Iy = 520\ cm^4$, $\alpha = 1.2e{-5}\ °C^{-1}$, $\Delta T = 40°C$

Metodo delle forze:
$Fcr = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \Delta T$
$Fcr = 4\pi^2 \cdot E \cdot Iy / L^2$

Risolvendo → $L = 745\ cm \approx 7.45\ m$

Esercizio sezione rettangolare

Caso 1 – Piano (x,z): cerniera-incastro ⇒ $L_0 \approx 0.7L \rightarrow Fcr = 2\pi^2 \cdot E \cdot Iy / L^2$

Caso 2 – Piano (y,z): appoggio-cerniera ⇒ $L_0 = L \rightarrow Fcr = \pi^2 \cdot E \cdot Ix / L^2$

Con $h = 2b \Rightarrow Ix = 4Iy \rightarrow Ncr = \min(Fcr_1, Fcr_2) = \pi^2 \cdot E \cdot Ix / 2L^2$

Verifica secondo NTC18

Secondo NTC 2018: $\lambda \leq 200$ per aste compresse in acciaio.

Consigli: calcolare Fcr e λ per gli elementi compressi del progetto.

Dimensioni fisiche

Grandezza	Dimensione	Unità
Fcr	F	N
λ	–	–
ρ, L_0	L	m

Appendice – Soluzione analitica

$v(z) = C1 \cdot \sin(\sqrt{(F/EI)} \cdot z) + C2 \cdot \cos(\sqrt{(F/EI)} \cdot z)$

Derivate:
$v'(z) = \sqrt{(F/EI)}[C1 \cdot \cos(\ldots) - C2 \cdot \sin(\ldots)]$
$v''(z) = -(F/EI) \cdot v(z)$

Sostituzione conferma: equazione soddisfatta (identità $0 = 0$).

Teoria della Trave – Cerchi di Mohr – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

Introduzione ai cerchi di Mohr

• Noto lo stato di tensione, i cerchi di Mohr permettono di trovare graficamente le tensioni principali e le direzioni principali.
• Al variare della giacitura considerata, i punti rappresentativi dello stato tensionale descrivono nel piano (σn, τn) una circonferenza detta cerchio di Mohr.
• Permette di individuare le tensioni principali e le relative direzioni per qualsiasi giacitura nel punto.

Dati iniziali

Nel punto Q appartenente alla sezione trasversale di una trave, con le convenzioni di segno:

$\sigma z = +7$ MPa
$\tau zx = 0$ MPa
$\tau zy = -12$ MPa

$\tau z = \sqrt{(\tau zx^2 + \tau zy^2)} = 12$ MPa

Convenzioni di segno

• Le componenti σz, τzx, τzy sono:
- Positive se:
- su facce con verso uscente, se concordi con l'asse
- su facce con verso entrante, se discordi con l'asse
- Negative negli altri casi
• Gli angoli sono positivi se antiorari

Procedura grafica (1/4)

1. Tracciare assi σn e τn
2. P(σz, $+\tau zy$) = (+7, −12), P′(0, +12)
3. Unire P e P′ → centro C sul segmento PP′
4. Tracciare cerchio con centro C e raggio CP = CP′

🧭 Procedura grafica (2/4)

5. Polo $P*$ = intersezione tra retta orizzontale da P e verticale da P'
6. $\sigma 1$ e $\sigma 2$ = intersezioni del cerchio con asse σn
7. Direzioni principali = congiungono $\sigma 1$ e $\sigma 2$ con $P*$

Risultati:
$\sigma 1 \approx +16$ MPa
$\sigma 2 \approx -9$ MPa
$\sigma 3 = 0$
$\theta \approx -37°$

🧭 Procedura grafica (3-4/4)

Schema geometrico con punti:
P, P', $P*$, centro C, assi σn e τn, cerchio maggiore.

Tensioni principali su x1 e x2: 16 MPa e −9 MPa

📐 Metodo analitico (1/2)

Formule:

$\sigma 1, \sigma 2 = \sigma z/2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma z^2 + 4\tau zy^2)}$
$\theta = -\frac{1}{2} \arctan(2\tau zy / \sigma z)$
$\tau max = \frac{1}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)$

Nota: $\sigma 3 = 0$ perché stato piano

📐 Metodo analitico (2/2)

Esempio numerico:

$\sigma z = +7$ MPa, $\tau zy = -12$ MPa

$\sigma 1 = +3.5 + 12.5 = +16$ MPa
$\sigma 2 = +3.5 - 12.5 = -9$ MPa
$\tau max = 12.5$ MPa
$\theta = +36.9°$ (rotazione antioraria)

Sistemi di riferimento

Lo stesso stato di tensione può essere descritto:
- nel sistema (z, y)
- oppure nel sistema principale $(x1, x2)$ con sole $\sigma 1$ e $\sigma 2$

Casi particolari

• Tensione monoassiale:
- $\sigma z = \sigma 0$, $\tau zy = 0$
- $\sigma 1 = \sigma 0$, $\sigma 2 = 0$

• Taglio puro:
- $\sigma z = 0$, $\tau zy = \tau 0$
- $\sigma 1 = +\tau 0$, $\sigma 2 = -\tau 0$
- direzioni principali ruotate di 45°

Osservazioni finali

• Tre cerchi di Mohr rappresentano il problema tridimensionale
• Le tensioni trovate sono quelle agenti su facce normali alla direzione in esame
• τmax = Raggio cerchio maggiore

Teoria della Trave – Significato Fisico delle Proprietà dei Materiali – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

Introduzione

Scopo della lezione: fornire le informazioni necessarie a comprendere le relazioni tra tensioni e deformazioni, ovvero le equazioni costitutive per un generico punto di una trave.

Tensione di snervamento

Punti chiave:
1. Limite di proporzionalità σel
2. Limite elastico o tensione di snervamento σy
3. Limite ultimo σu

$\sigma = F/A_0$ (lezione sulle tensioni normali), $\varepsilon = \Delta L/L_0$

Il punto di snervamento segna la fine del comportamento elastico e l'inizio di quello plastico.

Tipi di comportamento:
- Lineare elastico
- Plastico (con $\varepsilon perm$)
- Non lineare elastic

Modulo elastico (di Young)

Il modulo di Young E è la pendenza del diagramma tensione-deformazione:

$E = \sigma z / \varepsilon z$
dove $\varepsilon z = \Delta Lz / Lz$ (direzione della tensione σz)

🧮 Coefficiente di Poisson e modulo di elasticità tangenziale

• Coefficiente di Poisson $\nu = -\varepsilon y / \varepsilon z = -(\Delta Ly/Ly) / (\Delta Lz/Lz)$
• Modulo di elasticità tangenziale: $G = E / [2(1 + \nu)]$

Valgono per materiali isotropi.

🔍 Materiali isotropi e omogenei

• Isotropo: proprietà indipendenti dalla direzione (es. acciaio). Anisotropo: proprietà direzionali (es. legno).
• Omogeneo: proprietà costanti in tutti i punti.

→ Se isotropo → bastano due costanti (E e ν o E e G)
→ Se omogeneo → costanti uguali ovunque

⚠ Limiti delle costanti elastiche

Le costanti devono rispettare:
$E > 0$; $G > 0$; $-1 < \nu < \frac{1}{2}$

Nota: esistono materiali (es. schiume) con $\nu < 0$, ma non sono strutturali.

📊 Ordini di grandezza – E, G, ν

Materiale	E (GPa)	G (GPa)	ν
Acciaio	207–210	82	0.26–0.33
Alluminio	69–70	25–26	0.26–0.33
Calcestruzzo	20–35	12	0.15–0.16
Ferro	180–210	78–81	0.30
Legno (long. fibre)	8–15	–	–
Marmo	40–70	26	0.15
Ottone	100–120	37	0.36
Rame	105–124	44	0.35–0.36
Vetro	70	29	0.22

Tensione di snervamento – dati

Materiale	Tensione snervamento (MPa)	Densità (g/cm^3)
Acciaio ASTM A36	250	7.87
Cavi precompressione	1650	7.85
Lega titanio (6% Al, 4% V)	830	4.51
Aramidi (Kevlar/Twaron)	3620	1.44

Legame costitutivo elastico lineare e isotropo

• Diretto (tensioni in funzione delle deformazioni):

$\sigma z = E\, \varepsilon z$

$\tau zx = G\, \gamma zx$

$\tau zy = G\, \gamma zy$

• Inverso (deformazioni in funzione delle tensioni):

$\varepsilon x = -\nu/E \cdot \sigma z$

$\varepsilon y = -\nu/E \cdot \sigma z$

$\varepsilon z = \sigma z/E$

$\gamma zx = \tau zx/G$

$\gamma zy = \tau zy/G$

Esercizio: prova di trazione

• Sezione $A = 25\ mm^2$, lunghezza iniziale $L_0 = 50$ mm

• Carico $F = 60$ N, allungamento $\Delta L = 0.1$ mm

$E = (\sigma/\varepsilon) = (F/A) / (\Delta L/L_0) = (60/25) / (0.1/50) = 600\ N/mm^2$

Dimensioni fisiche

Grandezza	Dimensione	Unità SI
E, G	FL^{-2}	Pa
ν	–	–

Letture aggiuntive – Duttilità

• Duttilità: misura della deformazione plastica irreversibile prima della frattura.
• Materiale fragile → rottura con bassa deformazione plastica.

Autovalutazione e feedback

• Domande su Exercise (attivazione tramite Moodle)
• Feedback tramite QR code, link Google Form o post-it in aula

Teoria della Trave – Criteri di Resistenza – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

Introduzione

Come si sommano le tensioni per valutare l'effetto combinato sul materiale?

Esempi:
- σz = 3 MPa, τzx = 2 MPa, τzy = 1.5 MPa
- σz = 2 MPa, τzx = 3 MPa, τzy = 2 MPa

Obiettivo: trovare una grandezza indice $\sigma id = \sigma id(\sigma 1, \sigma 2)$ da confrontare con un valore limite del materiale fr(T), fr(C).

Materiali duttili e fragili

- Duttili: fr(T) ≈ fr(C)
- Fragili: fr(T) ≠ fr(C)

Per entrambi: limiti elastici fp(T), fp(C) → ridotti con coefficienti di sicurezza $\gamma M(T)$, $\gamma M(C)$:

$\sigma e(T) = fp(T)/\gamma M(T)$
$\sigma e(C) = fp(C)/\gamma M(C)$

Intervallo elastico convenzionale: $-\sigma e(C) \leq \sigma \leq \sigma e(T)$

Criterio di Galileo-Rankine (fragili)

- $\sigma 1$ e $\sigma 2$ devono stare all'interno di $[-\sigma e(C), \sigma e(T)]$
- Rappresentazione nel piano $(\sigma 1, \sigma 2)$: quadrato

Criterio di Tresca (duttili)

- $\tau max \leq \tau P = ½\ \sigma e(T)$
- $\tau max = ½ \max\{|\sigma 1 - \sigma 2|, |\sigma 1|, |\sigma 2|\}$

$\rightarrow \sigma id = \max\{|\sigma 1 - \sigma 2|, |\sigma 1|, |\sigma 2|\} \leq \sigma e(T)$

- Rappresentazione: esagono nel piano $(\sigma 1, \sigma 2)$

📐 Criterio di Huber-Hencky-von Mises

- $\sigma id = \sqrt{(\sigma 1^2 + \sigma 2^2 - \sigma 1 \sigma 2)} \leq \sigma e(T)$
- Rappresentazione nel piano ($\sigma 1$, $\sigma 2$): ellisse

🧪 Esperimenti

- Calcestruzzo: comportamento fragile
- Acciaio e alluminio: duttili

→ Esperimenti (Kupfer & Gerstle 1973), Corradi 1992

🧮 Esempio 1

$\sigma 1 = -5$ MPa, $\sigma 2 = +6$ MPa, limite = 10 MPa

- Tresca: $\sigma id = \max(11, 5, 6) = 11$ MPa → ❌
- von Mises: $\sigma id = \sqrt{(61 + 36 + 30)} = 9.5$ MPa → ✅

$\sigma 1 = +5$ MPa, $\sigma 2 = +6$ MPa → OK per entrambi

📊 Verifiche con σz e τz

Tensioni principali:
$\sigma 1, \sigma 2 = \sigma z/2 \pm ½ \sqrt{(\sigma z^2 + 4\tau z^2)}$

Verifica:
$\sigma id = \sqrt{(\sigma z^2 + D \cdot \tau z^2)} \leq \sigma e(T)$

D = 4 (Tresca)
D = 3 (von Mises)

🚧 Oltre l'elasticità

- Superamento della fase elastica non implica perdita di funzionalità.
- Lesioni possono agire come cerniere che riducono iperstaticità.
- Fori, intagli: tensioni concentrate → servono modelli elasto-plastici.

Criterio Mohr-Coulomb

- Per materiali non simmetrici (fr(T) ≠ fr(C))
- Esagono allargato verso la compressione nel piano ($\sigma 1$, $\sigma 2$)

Modelli fisici

- Ponti, dighe, edifici realizzati in scala ridotta per prove statiche e dinamiche.
- Esempi: ponte Zárate (Argentina), Pirellone (Milano), diga, ponte in muratura.

Teoria della Trave – Tensioni: Normali, Taglio, Torsione, Composte – Scienza delle Costruzioni (01SSOPM)

📌 Tensioni Normali

• Tensioni normali da sforzo normale (trazione/compressione): $\sigma z = Nz/A$
• Tensioni da flessione retta: $\sigma z = Mx/Ix \cdot y$ (formula di Navier)
• Flessione deviata: $\sigma z = Mx/Ix \cdot y - My/Iy \cdot x$
• Carico eccentrico: $\sigma z = Nz/A + Mx/Ix \cdot y - My/Iy \cdot x$
• Asse neutro: luogo dei punti dove $\sigma z = 0$
• Verifica: $\sigma z \leq \sigma lim$ (es. acciaio: $0.8 \cdot fyk$)

📌 Tensioni da Taglio

• Formula di Jourawski: $\tau = T \cdot S/It \cdot b$ (T = taglio, S = momento statico)
• Flusso di taglio interno: distribuito lungo le fibre della trave
• Asse neutro: punto dove $\tau = 0$ nelle travi simmetriche
• τmax dipende dalla geometria della sezione
• Importanza del momento statico dell'area efficace intercettata

📌 Torsione

• Sezioni circolari piene: $\tau = Mt/Ip \cdot r$
• Sezioni cave: stessa formula con $Ip = \pi/2\ (Re^4 - Ri^4)$
• Sezioni sottili aperte: formula di Bredt: $\tau = Mt / (2\Omega\delta)$
• Torsione può combinarsi col taglio (effetto somma o sottrazione)

📌 Tensioni Composte

• Somma delle sollecitazioni: flessione, taglio e torsione
• $\sigma z = Nz/A + Mx/Ix \cdot y - My/Iy \cdot x$ (flessione deviata + sforzo normale)
• τz = somma di torsione e taglio (stessa o opposta direzione)
• Verifica con tensione equivalente di von Mises:
$\sigma eq = \sqrt{(\sigma^2 + 3\tau^2)}$
• Importante in sezioni soggette a più sollecitazioni simultanee