

## Modulo 2

### ELEMENTI DI STATICÀ

Forze e momenti; le condizioni di equilibrio nel piano e nello spazio; vincoli e reazioni vincolari; il concetto di trave; caratteristiche di sollecitazione; travi reticolari, sistemi di travi.

#### Obiettivi didattici

- fornire strumenti per l'**analisi quantitativa** del comportamento delle strutture;
- individuare uno **schema statico** (che ci permetterà di definire precisamente le condizioni necessarie affinché un sistema di corpi, siano in equilibrio) e un modello meccanico della costruzione;
- applicare ad essi le **leggi dell'equilibrio**;
- individuare il **comportamento statico** di alcune forme strutturali maggiormente ricorrenti nell'architettura.

Descrizione attraverso modello fisico matematico

Fisica → meccanica → statica

La fisica studia degli oggetti, con gli strumenti della matematica

- Algebra simbolica (calcolo letterario)
- Sistemi di equazioni algebriche
- Trigonometria fondamentale (funzioni trigonometriche fondamentali e inverse)
- Studi di funzione polinomiali

### LE FORZE

Sinonimo carichi: azioni → carichi sulle costruzioni / azioni sulle costruzioni

Es. **azione del vento**: flusso d'aria che si muove con velocità V, e che esprime sulle pareti, (facce esterne) un campo di pressione.

Es. **azione della neve**, peso del manto nevoso che va ad accumularsi sulla copertura dell'architettura

Es. carico indotto dalle **persone** che abitano un'architettura → sovraccarichi variabili

Distinguiamo

**forza sollecitante**: forza che esprime un carico (**azione**)

**forza reagente**: reagisce alle forze sollecitanti e garantisce l'equilibrio della trave (**reazione**)

Es. **azioni permanenti** (sezione trasversale di un muro volto ad evitare che il terreno frani), in rosso forze sollecitanti (richiedono prestazione meccanica), in blu forze reagenti (che garantiscono reazioni muro controterra).

Le architetture sono suscettibili ad un grande numero di azioni, indotte dall'ambiente circostante o indotte dalla funzione che l'architettura svolge (carico di persone laddove la funzione sia residenziale).

Il concetto di forza è recente, viene dato da **Newton** nel **XVII secolo d.C.**

Ogni **causa** che tende a modificare lo **stato di quiete** o di **moto rettilineo uniforme** di un corpo dotato di **massa**. (non definisce la forza in quanto tale, ma definisce la forza in base agli effetti che induce)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Termini sormontati da freccia: quantità **vettoriali**

Termini senza freccia: quantità **scalari**

**Quantità scalare**: quantità che può essere compiutamente descritta da un numero

**Grandezze vettoriali**:

1. Intensità o modulo  $|F|$
2. Direzione
3. Punto di applicazione Q
4. Verso
- 5.

Retta d'azione r del vettore: direzione + punto di applicazione

**Unità di misura nel Sistema Internazionale**  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$[N] = [Kg] \cdot [m/s^2]$$

#### Convenzioni (1): forze e angoli

**Sistema di riferimento cartesiano generale positivo / destrorso** di Cartesio: formato da tre assi, tante quante le dimensioni dello spazio fisico, fra di loro ortogonali, versati dall'unghia delle tre dita.

**pollice: asse x**

**indice: asse y**

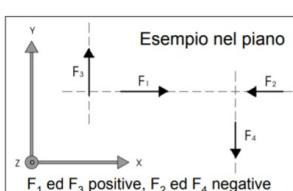
**medio: asse z**

Qualunque forza-vettore espressa nello spazio, se ha la direzione in comune con asse x/y/z possiamo sostituire la direzione della freccia (verso) con segno +/- a seconda che il verso sia concorde con l'asse di riferimento avente medesima direzione (positivo) o discorde (negativo).



Esempio nel piano

$F_1$  ed  $F_3$  positive,  $F_2$  ed  $F_4$  negative





Unità di misura  
[N]

Il carico di questi operai si può esprimere attraverso il concetto di forza?



[N/m]

Un **carico concentrato**, chiamato anche carico puntiforme, è una forza che agisce su una porzione molto ridotta di superficie, assunta puntiforme.



[N/m<sup>2</sup>]

Fare riferimento alla superficie dove gli operai poggiano (rosso), posso poi notare che quella superficie è piccola rispetto all'intero Empire State Building. → posso quindi ridurre questa piccola superficie ad un punto di applicazione, e calcolarne la forza attraverso la formula, supponendo che il peso di un operaio sia 80kg, e la forza di accelerazione che conosciamo grazie alla forza di gravità.

Un **carico uniformemente distribuito** è una forza applicata su una superficie avente dimensioni finite, come una linea (blu) o un area (verde), e distribuita sulla stessa secondo una certa legge che definisce la variazione di quel carico lungo la linea o l'area.

#### Composizione di due forze sulla stessa retta d'azione

Primo sistema di forze elementari ( $F_1$  ed  $F_2$ ) → compongono sistema che si dice piano, perchè hanno un vincolo da rispettare: entrambe hanno la medesima retta d'azione (tratteggiata,  $R_1$ )

Trovare la forza che risulta dalla somma vettoriale di questi due vettori → **Risultante**: forza equivalente al sistema di forze iniziale, ovvero che ha lo stesso effetto/risultato (effetti cinematici definiti da Newton).

Se le due forze iniziali giacciono entrambe sulla retta d'azione  $R_1$ , anche la risultante giacerà sulla retta d'azione  $R_1$ ; e il suo modulo, lo potremmo stabilire facendo riferimento alla somma algebrica dei moduli  $F_1$  ed  $F_2$ , seganti dal verso con la convenzione di segno.

I: indice generico che potrà assumere valori da 1 a n

Forza equilibrante: forza agente sulla retta d'azione  $R_1$  ( $E$ ) che ha il medesimo modulo di  $R$  ma verso opposto, e per definizione, è quella forza che a sua volta sommata ad  $R$  darà come risultato vettore nullo. Forza che aggiunta a  $F_1$  e  $F_2$ , garantirà che il sistema di forze  $F_1$   $F_2$  ed  $E$  sia una causa nulla di effetti → effetto nullo. Il mio corpo dotato di massa non abbandona il suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme.

#### Composizione di due forze sulla stessa retta d'azione: un'applicazione

##### **Fune: segmento nero che giace su una retta infinita R**

Su questa retta agiscono le due forze espresse dai due uomini che tirano la fune

**Uomo 1 tira con forza  $F_1$  (300N)**

**Uomo 2 tira con forza  $F_2$  (-200N)**

La risultante  $R$  sarà pari a  $F_1 + F_2 = 300 + (-200) = 100N$

Effetto cinematico della risultante: l'uomo 1 trascina l'uomo 2 verso destra.

Per **equilibrare il sistema di forze**, l'uomo 2 dovrà chiamare l'uomo blu

Il modulo di  $E$ , dovrà essere pari al modulo di  $R$  e il verso di dovrà essere opposto al verso di  $R$ :

$|E|=|R|=100N \rightarrow$  **l'equilibrante annulla l'effetto della risultante**

#### Sistemi di forze complanari: composizione di 2 forze concorrenti in un punto

Retta d'azione  $R_1$  ed  $R_2$ , appartengono allo stesso piano

Come otteniamo la risultante con la statica grafica?

Attraverso problema formalizzato da Roberval e Vrignon (XVII sec)

**Regola del parallelogramma:** si tratta di traslare le due forze dal loro punto di applicazione sulle rette  $R_1$  ed  $R_2$  nel punto di intersezione delle due rette medesime, dove sarà necessariamente applicata la forza risultante. Dobbiamo far passare per l'estremo di  $F'_1$  una retta parallela alla retta d'azione di  $F'_2$  e viceversa passare per l'estremo di  $F'_2$ , una retta parallela, alla retta d'azione di  $F'_1$ .

Per costruzione, le due rette d'azione, e le due di costruzione, formano un parallelogramma.

Facciamo passare una terza retta di costruzione che passa per il punto di intersezione iniziale e per il vertice opposto del parallelogramma. La diagonale staccata esprime il modulo della risultante, il verso è quello che va dal punto di applicazione al verso opposto del parallelogramma.

#### **Triangolo delle forze**

##### Risultante ed equilibrante di due forze concorrenti in un punto

**E** → **forza equilibrante**: il triangolo delle forze è “chiuso”

**R** → **forza risultante**: il triangolo delle forze è “aperto”

#### Equilibranti di una forza secondo due direzioni: un'applicazione alla capriata

Studio del nodo in cui converge la testa del setto murario, la catena e il puntone

Catena soggetta a forza  $T$  e puntone soggetto a forza  $P$

Vogliamo capire qual è l'equilibrante che deve esprimere il muro (che annulla gli effetti)

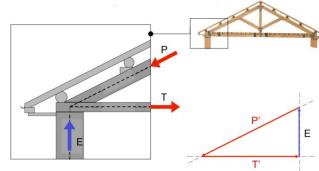
$T$  passerà per il punto di intersezione delle rette d'azione delle due forze  $P$  e  $T$

Costruisco il triangolo, con ipotenusa  $P'$  (sforzo del puntone), e che avrà un cateto che la forza  $T'$

L'equilibrante dovrà necessariamente completare il triangolo → chiuso

$E'$ : forza di pari modulo, pari direzione, pari verso, la posso applicare nella freccia blu

Il muro quindi, per reggere la capriata dovrà esprimere una forza la cui **retta d'azione è verticale**



(Ripasso lezione precedente)

Descrizione quantitativa del comportamento meccanico delle strutture

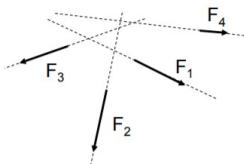
Carico/azione

Elemento modellistico fondamentale → forza (definita sulla scorta del contributo di Newton, come grandezza vettoriale (punto di applicazione, modulo/intensità, direzione, verso),

Comporre/scomporre forze attraverso l'ausilio della statica grafica

caso elementare di sistema di forze piano con medesima retta d'azione → risultante ed equilibrante

Regola parallelogramma, e del triangolo delle forze



#### Sistemi di forze agenti su rette d'azione complanari: composizione di n forze non correnti in un punto

Molteplici punti di intersezione al finito (rette non parallele)

Conosciamo il punto di applicazione della risultante dato che le rette si incontrano nello stesso punto? No

Non possiamo utilizzare un approccio analogo al triangolo delle forze

Dobbiamo intanto determinare il punto di applicazione della risultante, ovvero dell'equilibrante

Possiamo immaginare di applicare il metodo del parallelogramma, considerando del sistema di n forze, due a priori, (F1 ed F2). Ho traslato F1 ed F2 nel punto di intersezione delle rispettive rette d'azione, (F'1 e F'2), costruisco il parallelogramma delle forze, e determino compiutamente la risultante (R1,2).

A questo punto posso considerare un sistema di forze equivalenti, non più composto da quattro forze, ma solamente da 3 (Risultante1,2 - F3 - F4).

Posso procedere per via **iterativa**, quindi iterando/ripetendo lo stesso approccio, considerando la risultante R1,2 ed F3. Ripeto la medesima operazione andando a traslare le due forze che sto considerando nel nuovo punto di intersezione delle rette d'azione, e ricostruisco il corrispondente parallelogramma delle forze.

Ottengo la nuova forza risultante R1,2,3.

Ripeto lo stesso procedimento con la risultante R1,2,3 ed F4. Determino la risultante R (R1,2,3,4).

#### Sistemi di forze agenti su rette d'azione complanari: composizione di n forze concorrenti in un punto

Vincolare sistema di forze iniziali ad una condizione

Numero a piacere di forze, sistema piano, ma le rette d'azione di tutte le forze si incontrano in unico punto di intersezione al finito.

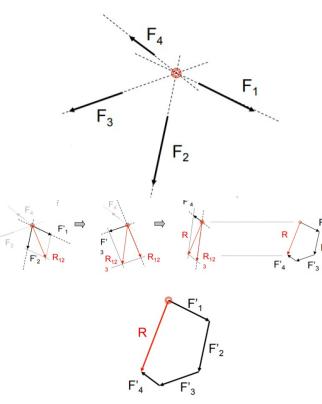
In questo caso conosciamo a priori il punto di applicazione della forza risultante → punto di intersezione comune delle quattro rette d'azione (punto rosso).

L'**approccio iterativo** è ancora valido, perchè generale

Il vincolo del sistema di forze ci da la possibilità, analogamente al sistema di due sole forze, di figurarci un altro approccio alternativo → costruire non più un triangolo delle forze, ma un **poligono delle forze**.

Collego tutte le forze in sequenza, e completo il poligono con la risultante R'

Se il poligono risulterà aperto, perchè non circuitante, avremmo determinato graficamente la forza risultante. Le due costruzioni grafiche portano alla medesima soluzione → è verificata l'unicità della soluzione



#### Osservazioni sulla costruzione del poligono delle forze

**Proprietà commutativa** (medesima somma scalare e vettoriale): variando l'ordine degli addendi, il risultato della somma non cambia. Questa proprietà vale anche per la somma vettoriale, quindi anche per la statica grafica → l'ordine con cui compongo le forze non fa cambiare il risultato.

**L'ordine con cui si costruisce il poligono è ininfluente sul risultato finale.**

#### Scomposizione di una forza secondo due direzioni

Operazione duale della composizione di forze

Data una forza, intendo determinarne le componenti (risultante) di due forze che ignoro, se non nelle loro rette d'azione.

Dati del problema: conosco la forza F, tangente sulla sua retta d'azione e applicata nel punto (di applicazione); mi propongo di determinare le componenti della forza F.

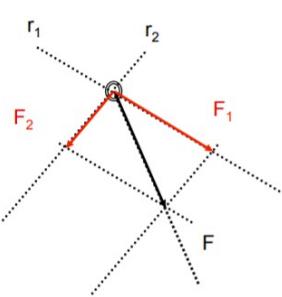
Cercare due componenti di una forza, non conosce l'unicità della soluzione. Perchè la soluzione sia unica, è necessario specificare che di F voglio cercare due componenti, che dovranno essere due forze agenti su due rette d'azione definite per la loro direzione e per uno dei punti in cui passano, in particolare il punto di applicazione della forza F.

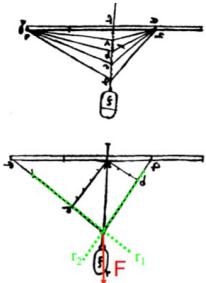
**Operazione inversa della composizione di due forze**, quindi possiamo applicare in maniera inversa lo stesso procedimento → regola del parallelogramma.

Costruiremo il parallelogramma, i cui lati saranno staccati sulle rette r1 ed r2 e su due rette di costruzione parallele, l'una ad r1, l'altra ad r2, ed entrambe queste due rette passanti per il punto finale del vettore che rappresenta F. La forza F per costruzione è una diagonale del parallelogramma

sarà sufficiente considerare i due lati del parallelogramma che hanno in comune il punto di applicazione F. I due lati avranno una lunghezza proporzionale alla forza F1 ed F2 che saranno versate dal punto di applicazione di F all'altro vertice del parallelogramma che definisce il segmento medesimo.

Abbiamo determinato le componenti di F. Invece di determinare la risultante di due forze, abbiamo determinato le due forze che compongono una forza data.





La prima applicazione di questa applicazione grafica si deve a **Leonardo da Vinci**, che due secoli prima della definizione di forza data da Newton, già schizzò in uno dei suoi codici questo problema: Leonardo disegna un corpo dotato di massa (grossso blocco di pietra) che doveva essere innalzato, alla quota della testata di un setto murario delle mura difensive di Milano.

Lui si figura di innalzare questo corpo, che sappiamo esprimere una forza, attraverso un sistema di due funi che conoscono due rimandi con due carrucole.

Si pone il problema di sapere dove era utile collocare le due carrucole in maniera che i due operai tirassero le funi e non fossero costretti a fare sforzi eccessivamente diversi l'uno con l'altro.

Altro problema che si pone: capire se le forze che dovranno esercitare i due operai aumenteranno in modulo man mano che il grave viene sollevato.

Esiste una relazione (evidenza in forma grafica) tra l'angolo definito delle due rette d'azione e il modulo delle due componenti che su queste rette d'azione agiscono.

#### Scomposizione di una forza secondo due direzioni

Sistema cartesiano destroso positivo

Consideriamo forza  $F$  e ci proponiamo di scomporre questa forza  $F$ , ma le due rette d'azione elle componenti, oltre che passare necessariamente per il punto di applicazione della forza, avranno direzioni che saranno le medesime direzioni degli assi che definiscono il piano in cui il nostro problema è stato posto. Cercheremo una componente lungo una retta d'azione parallela all'asse  $x$  e una componente di  $F$  su una retta d'azione avente la medesima direzione dell'asse  $y$ ; e per questa ragione queste due componenti le chiameremo  $F_x$  ed  $F_y$ .

Costruzione grafica: **parallelogramma delle forze**, che avrà come angoli interni, quattro angoli congruenti pari a  $90^\circ$ , perchè il sistema di riferimento è cartesiano ortogonale.

In virtù del fatto che prima è un rettangolo delle forze, la forza iniziale  $F$ , definisce due triangoli rettangoli.

La direzione della retta d'azione di  $F$  rispetto alla direzione  $X$  la qualifico attraverso l'angolo Alpha.

Possiamo determinare analiticamente le componenti di  $F$

Due relazioni fondamentali che legano un cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo attraverso la funzione trigonometrica dell'angolo opposto adiacente interno, quindi riconosco  $F_y$  (vettore che ha un modulo pari alla lunghezza del cateto), cateto che è uguale all'ipotenusa  $F$  per il seno dell'angolo opposto  $\alpha$   
 $\rightarrow F_y = F \cdot \sin(\alpha)$

Analogamente riconosco in  $F_x$  un vettore il cui modulo sarà pari alla lunghezza dell'altro cateto, uguale all'ipotenusa  $F$  per il coseno dell'angolo adiacente interno  $\alpha$

$$\rightarrow F_x = F \cdot \cos(\alpha)$$

Verso di  $F_y$  concorde con l'asse  $y$  del sistema di riferimento

Verso di  $F_x$  concorde con l'asse  $x$  del sistema di riferimento

Questa operazione di scomposizione ci consente di applicare la convenzione sul segno di una forza, anche ad una forza che non abbia la medesima direzione degli assi di un sistema di riferimento.

(allegato lavagna)

Come determinare positività/negatività della forza  $F$  in figura se non segue la direzione di uno degli assi del sistema cartesiano?

E' sufficiente considerare due rette d'azione di due componenti di  $F$  che siano l'una parallela all'asse  $X$ , e l'altra parallela all'asse  $Y$ , costruire un rettangolo delle forze, staccare le due componenti

Determino modulo componente  $F_x$ : cateto = ipotenusa ( $F$ )  $\cdot \cos(\alpha)$

Determino verso vettore:  $+F \cos(\alpha)$

Determino modulo e verso componente  $F_y$ : cateto = ipotenusa ( $F$ )  $\cdot \sin(\alpha)$

Determino verso vettore:  $-F \sin(\alpha)$

#### Scomposizione di una forza secondo due direzioni: un'applicazione

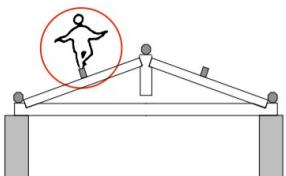
Capriata sui cui puntoni sono già state poste delle travi secondarie (sezione evidenziata in grigio scuro) appoggiate all'estradosso del puntone (che ha tutti gli effetti è un piano inclinato).

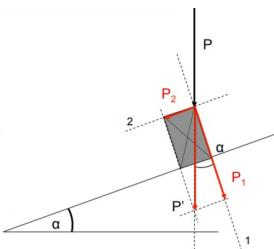
Su queste travi cammina un operaio. Mi devo preoccupare dell'eventuale scorrimento della trave secondaria, dall'alto in basso, sul puntone, che è l'effetto cinematico di una causa, che non può che essere una forza, anch'essa avente retta d'azione parallela all'asse del puntone, trascurando ogni forza di attrito?

Forza peso dell'operaio ha una retta d'azione verticale. Come può una forza che ha pura retta d'azione verticale, dare luogo ad una componente nella direzione d'asse del puntone?

E se questa componente esiste, qual è il suo modulo? E il suo verso?

**Modellizziamo il problema:** ho una retta d'azione che è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo  $\alpha$  (stessa inclinazione fra l'asse del puntone e l'asse della catena) su questa retta pongo la mia trave secondaria, e sullo spigolo della mia trave secondaria faccio passare una retta che è retta d'azione della forza peso  $P$  dell'omino.  $\rightarrow$  Voglio **determinare le componenti di  $P$  lungo la direzione 2** (parallela all'asse del puntone) e una **direzione 1** (perpendicolare all'asse del puntone).





Traslo la forza  $P$  in maniera che abbia il punto di applicazione nel punto di intersezione delle due rette, i due angoli corrispondenti sono detti entrambi  $\alpha$ , traccio il rettangolo delle forze e definisco le due componenti  $P_1$  e  $P_2$ .

Adesso le posso esprimere analiticamente:  $P_1 = P \cdot \cos(\alpha)$ ,  $P_2 = P \cdot \sin(\alpha)$

Se attribuiamo un modulo a  $P$ :  $600\text{N}$ , e un'ampiezza ad  $\alpha$ :  $30^\circ \rightarrow P_1 = 512\text{N}$ ,  $P_2 = 300\text{N}$

Risponde alle domande in termini quantitativi → abbiamo un valore

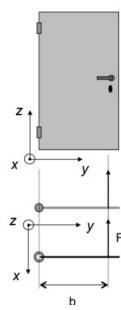
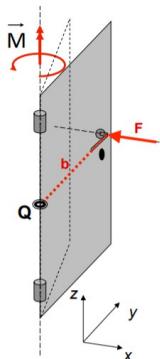
N.B. Vettorialmente  $P$  è la risultante delle componenti  $P_1$  e  $P_2$ , ma questo non implica che la somma dei moduli sia pari al modulo della forza iniziale.

### FORZE E MOMENTI

Determinare forza risultante di un sistema di forze agenti su rette d'azione complanari, aventi la medesima direzione ma distinte, cioè rette, parallele fra di loro.

**Momento di una forza** (quantità vettoriale): si definisce momento di una forza rispetto ad un asse ortogonale alla retta di azione della forza stessa, il vettore:  $\mathbf{M} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{F}$

**Effetti di un momento**: perturbare lo stato di un corpo dotato di massa, e di indurre una variazione della sua velocità angolare valutata rispetto ad un punto di riferimento (il suo centro di rotazione).



**Retta d'azione**: il vettore  $M$  agisce sull'asse

**Braccio  $b$** : distanza tra la retta d'azione della forza, e l'asse attorno a cui valutiamo la rotazione indotta dal momento. Elemento staccato dalle due rette, su una retta che deve essere necessariamente perpendicolare, tanto alla retta d'azione di  $F$ , quanto alla retta d'azione di  $M$ .

**Il polo  $Q$** : l'intersezione tra l'asse del vettore momento e il piano a cui appartengono la forza  $F$  e il braccio  $b$ . Particolare punto della retta d'azione di  $M$ , traccia della retta d'azione di  $M$  sul piano definito dalla retta d'azione della forza  $F$  e della retta d'azione del braccio  $b$ .

**Intensità o modulo**:  $|M| = |b| \cdot |F|$

**Unità di Misura**: (N)(m)

**Verso**: "regola della mano destra"

**Distanza retta polo**: distanza staccata su quella retta che passa per il polo e che è perpendicolare con la retta d'azione della forza.

Es. La porta è un corpo dotato di massa. Aprirla significa indurre una rotazione di questo corpo dotato di massa, intorno ad un asse che in questo caso è verticale e passa per i cardini della porta.

Stato iniziale di quiete. Come faccio ad indurre, quale effetto della mia forza, una velocità angolare espressa in radianti al secondo (ampiezza dell'angolo percorsa nell'unità di tempo).

Il momento non dipende esclusivamente del modulo della forza (applico  $10\text{kg}$  forza alla maniglia)

Se l'effetto dipende dal punto di applicazione (retta d'azione della forza), anche la causa dipende dalla retta d'azione della forza, ma non in assoluto. Dalla collocazione relativa della retta d'azione della forza, rispetto all'asse attorno il quale voglio valutare il momento.

Il momento non può essere solo funzione della forza, ma anche il braccio.

Se il momento è un vettore, come lo rappresentiamo graficamente?

- Per distinguerlo dalla rappresentazione grafica che usiamo per le forze, abitualmente il vettore momento è espresso come un **segmento rettilineo versato**, però con una **doppia freccia**, per indicare che è determinato da due vettori (forza e braccio).
- Un'altra possibile rappresentazione è quella di utilizzare un **vettore curvilineo** segnato in rosso, con una **freccia** che indica il **verso**. Il fatto che sia curvilineo sta a suggerire che quel momento avrà un effetto rotazionale sul corpo dotato di massa, e che questa rotazione avverrà nello spazio o nel punto polo  $Q$  nel piano, e ci racconta più intuitivamente l'effetto del vettore momento.

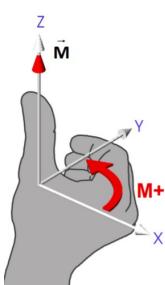
E' possibile definire il verso del vettore momento facendo affidamento alla binarietà del segno + o -?

Si, ma dovremmo usare una convenzione diversa da quella delle forze.

Facciamo riferimento alla **terna cartesiana ortogonale destrorsa positiva**, definita da assi X,Y,Z; nel momento in cui il vettore momento sia espresso con vettore rettilineo e doppia freccia, quindi ne conosciamo la retta d'azione, che coincide con uno degli assi del sistema di riferimento, allora possiamo dire che il momento è **positivo** nel momento in cui il doppio vettore momento ha un verso che coincide con il verso positivo dell'asse di riferimento.

### **Regola della mano destra o del cacciavite**

Se viceversa facciamo riferimento al **vettore curvilineo** che esprime graficamente il momento, usiamo ancora una volta la **mano destra**, orientiamo le quattro dita non opponibili della mano, curve, e con le unghie versate, con il verso analogo al vettore curvilineo, tiro fuori il pollice opponibile, e vedo che il pollice non potrà che orientarsi con l'asse che completa la terna destrorsa dell'asse cartesiano e devo solo verificare che abbia l'unghia versata come il verso dell'asse che completa la terna, in questo caso si dice **positivo, se ha verso opposto si dice negativo**.



Quello che abbiamo visto nello spazio, lo rivediamo nel piano

### Il momento nel piano xy

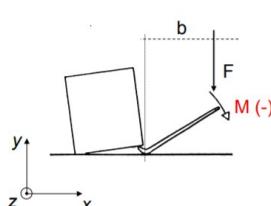
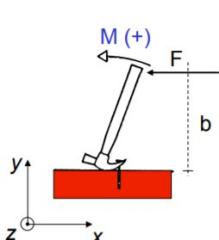
Ci posizioniamo nel piano definito dalla retta d'azione, in questo caso

- **la retta d'azione** (direzione) del momento avrà sempre una direzione coincidente con l'asse Z (perpendicolare al piano)
- la retta d'azione sarà sostituita dal **polo** (traccia della retta d'azione sul piano)
- **Intensità:**  $|M| = |F| \cdot |b|$
- **Verso:** guardando il piano dalla parte del verso positivo dell'asse Z,

il verso è **positivo** se è **antiorario**, e **negativo** se è **orario**

→ scorciatoia che non sostituisce la regola della mano destra, ma la particolarizza nel caso in cui fossimo nel piano perpendicolare alla retta d'azione del momento e lo stesso guardando dal verso positivo del piano medesimo in un sistema di riferimento destrorso positivo.

Caso 1



Caso 2

Piano XY. Voglio sollevare il corpo dotato di massa (**blocco di calcestruzzo armato**) usando un piede di porco. Applico una forza verticale all'estremo del manico dello strumento, questo ruoterà intorno al polo. L'effetto cinematico è rappresentato dal vettore curvilineo.

Prendo la mano destra, pongo le dita con le unghie versate come il verso che mi attendo dall'effetto cinematico. Il pollice questa volta ha verso opposto rispetto all'asse Z, quindi posso affermare che si tratta di un **momento negativo**.

Es. astratto (figura lavagna)

Consideriamo sistema di riferimento cartesiano destrorso ortogonale positivo

Consideriamo una retta d'azione f su cui agisce una forza F e mi pongo di valutare il momento espresso da questa forza. Voglio determinare M di F, Q

Per prima cosa devo definire il braccio (distanza euclidea tra il polo e la retta d'azione della forza)

Devo tracciare per Q, una retta che sia perpendicolare ad f (n)

E identifico il punto di intersezione. Distanza tra i due punti è b.

Il modulo di M sarà pari a  $F \cdot b$

Disegno il vettore curvilineo e utilizzando la regola della mano destra scopro che il pollice è versato come l'asse Z

Lo stesso esercizio lo ripetiamo per un altro polo

intendo valutare il momento di F, questa volta in P

Il braccio (b') → il momento avrà modulo  $F \cdot b'$

Regola della mano destra → pollice verso opposto all'asse Z

Non solo il modulo del momento dipende dalla posizione

del polo, ma a parità di verso della forza, anche il verso del momento dipende dalla posizione del polo

Motivo per cui la convenzione di verso sul momento, non ha nulla a che vedere direttamente, con la convenzione di verso sulla forza.

(figura lavagna)

Il fatto che la forza abbia segno positivo, non implica che il momento abbia segno positivo.

**Le due convenzioni sono distinte.**

### Teorema di Varignon

Enunciato: Dato un sistema di forze, agenti su rette d'azione complanari, e dato un polo Q, anch'esso parte del problema iniziale dato, allora il momento risultante rispetto al polo Q, equivale al momento della forza risultante (il momento risultante equivale al momento della risultante)

Al di là di una proposizione articolata, questi due momenti sono piuttosto differenti.

Caso: sistema di forze agenti su rette d'azione complanari, date le quattro forze, a il polo Q

Siamo in grado di definire i quattro bracci delle quattro forze F1, F2, F3, F4, nominate b1, b2, b3, b4

Per ogni forza siamo in grado di determinarne il momento.

La somma vettoriale dei quattro momenti espressi nelle quattro forze, risulterà nel momento risultante (che ha lo stesso risultato cinematico rotazionale dei quattro momenti singoli combinati insieme).

Come faccio a valutarli?

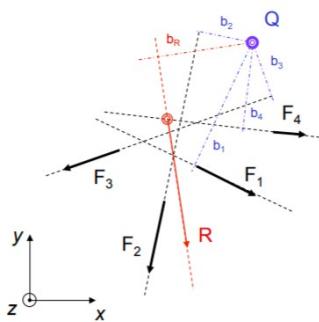
$F_1 \cdot b_1$  (momento della forza  $F_1$  rispetto a  $Q \rightarrow$  positivo)

$F_2 \cdot b_2$  (momento della forza  $F_2$  rispetto a  $Q \rightarrow$  positivo)

$F_3 \cdot b_3$  (momento della forza  $F_3$  rispetto a  $Q \rightarrow$  negativo)

$F_4 \cdot b_4$  (momento della forza  $F_4$  rispetto a  $Q \rightarrow$  positivo)

La somma algebrica dei quattro moduli equivale al momento risultante, che risulta dalla combinazione di quattro momenti.



$F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4 = R \cdot b_R$  (momento della forza risultante, per convenzione positivo)

**Il momento risultante (a sinistra del termine di uguaglianza) equivale al momento che la forza risultante del sistema di forze, esprime rispetto a Q in ragione del suo braccio (bR)**

$$\text{Forma compatta} \rightarrow \sum_{i=1}^{i=n=4} F_i \cdot b_i = R \cdot b_R$$

Se tutto è noto ( $F$ ,  $b$ ,  $R$ ,  $b_R$ ) → questa formulazione matematica è una pura identità

Sarebbe più utile che uno dei termini fosse un incognita, non sia noto, perché non sarebbe più un'identità, diventerebbe un'equazione che ci permetterà di determinare univocamente l'incognita.

Nel nostro caso l'incognita è  $R$

L'equazione mi permette di mettere in evidenza  $R$  e determinarla.

#### Sistema di forze complanari: composizione di n forze parallele

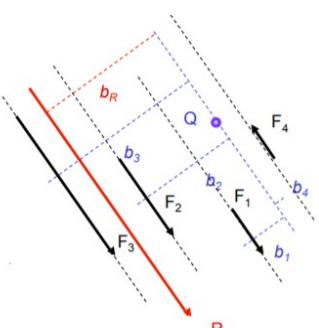
Agenti su rette d'azione che giacciono tutte sullo stesso piano, in questo caso XY, tutte **parallele** fra di loro. Non abbiamo nessuno strumento, con la statica grafica, che ci permette di determinare univocamente la risultante di questo sistema di forze. Sicuramente possiamo valutarne l'intensità/modulo.

Perchè l'intensità di  $R$ , sarà pari alla somma algebrica dei moduli segnati. Assumendo di considerare quale verso positivo quello della retta d'azione  $R_3$ , posso scrivere che  $F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = |R|$

So a priori quale sarà la direzione della risultante  $R$ , perchè se tutte le forze hanno la medesima direzione, allora anche la risultante, non potrà che avere quella direzione.

Ciò che non conosco è la **retta d'azione** della risultante  $R$  (il suo **punto di applicazione**)

$R$  potrà agire su una qualunque retta, appartenente al fascio improprio di rette, a cui appartengono  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$



**R:**? Pongo polo  $Q$ , posso valutare i bracci di tutte e quattro le forze, e in questo caso tutte le forze esprimono dei momenti di verso positivo.

$M1Q + M2Q + M3Q + M4Q = MRQ$  (momento espresso dalla risultante  $R$ , rispetto a  $Q$ ) analogamente  $F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4 = R \cdot b_R = (F_1 + F_2 + F_3 - F_4) \cdot b_R$

forma compatta:

(sommatoria dei momenti / sommatoria delle forze)

$$b_R = \frac{F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 + F_3 \cdot b_3 + F_4 \cdot b_4}{F_1 + F_2 + F_3 - F_4} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i \cdot b_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i}$$

Definisco univocamente  $b_R$ , posso tracciare il vettore  $R$ , perchè agirà su una retta d'azione che disterà rispetto a  $Q$ , di un braccio  $b_R$ .

#### Forza-Peso

Caso particolare di forza, vale la definizione di Newton

L'accelerazione che contribuisce ad indurre la forza nel corpo dotato di massa  $M$  non è un'accelerazione qualsiasi, ma è un'**accelerazione di gravità**.

E dato che l'accelerazione, nell'espressione  $m \cdot g$  è l'unica quantità vettoriale, la forza-peso erediterà dall'accelerazione gravitazionale, la direzione e il verso.

L'accelerazione di gravità è diretta dal nostro corpo dotato di massa, al baricentro della Terra, e il verso andrà dal corpo dotato di minor massa, al corpo dotato di maggior massa.

Il modulo dell'accelerazione di gravità dipende dalla massa del pianeta (sulla Terra  $g: 9,81 \text{ m/s}^2$ )

Es. Se ho un corpo dotato di massa, pari a 1Kg, allora il modulo della forza peso sarà dato da  $1\text{Kg} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \rightarrow 9,81 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$

Direzione verticale, verso il basso, punto di applicazione (dentro il baricentro del corpo dotato di massa)

Baricentro per definizione: punto di applicazione della forza-peso

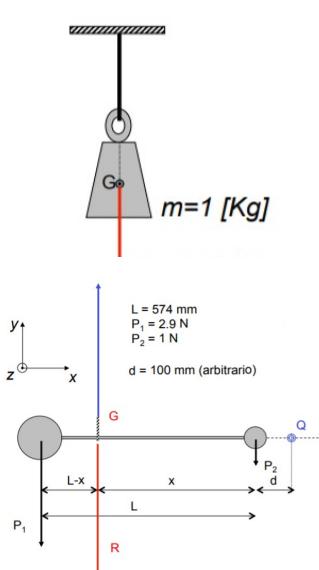
→ relazione tra l'unità di misura tradizionale e quella adottata dal S.I.  $1\text{Kgf} \approx 10 \text{ N}$

#### Il baricentro di masse puntiformi – Problema

Due corpi elementari dotati di massa (due sfere che nel piano XY sono rappresentati come circonferenze)

A parità d'intensità di massa volumica, e di accelerazione di gravità, l'una avrà una forza-peso maggiore

$P_1: 2,9\text{N}$     $P_2: 1\text{N}$



Queste due masse, che possiamo immaginare puntiformi, assimilabili ad un punto, distano l'una dall'altra in direzione X, di una lunghezza L pari a 574 mm, e ad unire fisicamente i due corpi è una bacchetta di ferro. Determinare la risultante delle forze peso associate a queste masse puntiformi, perchè una volta conosciuta la forza risultante, potremmo anche definire la forza equilibrante.

Potremmo definire in quale punto sospendere questo sistema con una fune, che farà in modo che questa sorta di bilanciere asimmetrico non ruoti.

Poniamo un polo Q qualsiasi (sulla retta su cui giacciono le masse)

Polo Q non coincide né con il baricentro della massa 1 né con il baricentro della massa 2, ma dista dal baricentro della massa 2 una distanza d.

Ipotizzo una retta d'azione per la forza risultante R, la distanza che separa la retta d'azione di R e il baricentro della massa 2, la chiamo x  
x ed L-x sono complementari ad L

### Applicazione teorema di Varignon

Il momento rispetto a Q della forza peso P<sub>1</sub>, + il momento rispetto a Q della forza peso P<sub>2</sub> = momento espresso dalla risultante R rispetto al polo Q, dove le quantità tra parentesi sono binomi che esprimono i bracci della forza P<sub>1</sub> e della forza R rispetto a Q; mentre il braccio di P<sub>2</sub> è un monomio.

$$\begin{cases} P_1 \cdot (L+d) + P_2 \cdot d = R \cdot (x+d) \\ R = P_1 + P_2 \\ P_1 \cdot (L+d) + P_2 \cdot d = (P_1 + P_2) \cdot (x+d) \\ 2.9 \cdot (574 + 100) + 1 \cdot 100 = 3.9 \cdot (x + 100) \\ 1954.6 + 100 = 3.9 \cdot x + 390 \\ x = \frac{1954.6 + 100 - 390}{3.9} = 427 \text{ mm} \end{cases}$$

Modulo segnato di R deve essere pari ai moduli segnati della somma algebrica di P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub>

I versi li assumo come entrambi positivi

Posso risolvere il sistema di equazioni in forma simbolica, oppure posso sostituire ai simboli i valori numerici dei moduli.

X = 427 mm → la distanza tra la retta d'azione di r e il baricentro della massa 2

R è completamente nota e posso definire l'equilibrante di R → forza blu

### Esercizio

Massa 1 e massa 2 diverse, quindi diverse sono le loro forze-peso,

Portare massa 2 nel vuoto fino a che lo spigolo dell'edificio coincida con il baricentro del sistema di masse. Determinare punto di applicazione della risultante, che sarà il baricentro del sistema di masse.

- forze peso delle due masse → P<sub>1</sub>: 700N P<sub>2</sub>: 300N
- lunghezza tavola da ponte (distanza fra le due masse) → L: 4m

Determinare l'incognita formale, la distanza x che separa il baricentro della massa 1, dal baricentro complessivo del sistema di masse (punto di applicazione della forza peso risultante delle due forze-peso).

Cosa sappiamo della risultante? Che la sua retta d'azione avrà direzione verticale;

Conosciamo il modulo R della risultante (in virtù del fatto che tutte le forze hanno la medesima direzione) sarà pari alla somma dei moduli:

$$|P_1| + |P_2| = 700 + 300 = 1000 \text{ N}$$

Sappiamo che R sarà pari a -P<sub>1</sub> - P<sub>2</sub> → verso opposto all'asse Y

Non sappiamo la posizione della retta d'azione

Si collocherà su una retta d'azione che sarà posizionata tra P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub>, e verosimilmente più vicino a P<sub>1</sub> (avendo modulo maggiore).

Eleggiamo quale polo Q il punto di applicazione di P<sub>2</sub>:

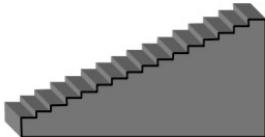
la forza P<sub>1</sub> avrà un braccio rispetto a quel polo (L),

la forza P<sub>2</sub> non avrà un braccio rispetto al polo Q (nullo)

la forza risultante R avrà un braccio (X)

La posizione della retta d'azione è pari a -2,8m

La retta d'azione di R, sulla quale agisce R, disterà da Q, una lunghezza (X) che è pari a 2,8m



Baricentro di un sistema piano di masse puntiformi

Possiamo ricondurre questo caso anche a masse non puntiformi

Porzione di maschio murario di spessore costante, è sagomato in maniera da realizzare una rampa scala  
Come facciamo a determinarne il baricentro?

- 1) Suddividere la scala in n volumi elementari (quadratini, a cui attribuiamo la propria massa, e calcoliamo la singola forza-peso) Otteniamo la risultante delle forze-peso

Avendola definita come agente sulla retta d'azione, conosciamo esattamente la posizione del baricentro, ma non ancora la sua altezza.

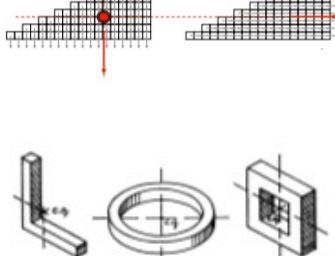
- 2) Come facciamo a determinare le coordinate cartesiane precise del baricentro?

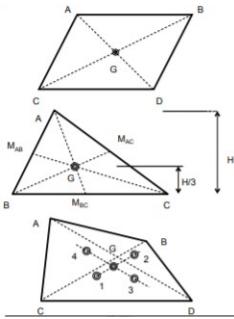
Ripetiamo lo stesso procedimento applicandolo alle medesime masse elementari, ma immaginando un'accelerazione, non di gravità (verticali) ma orizzontali.

- 3) Applico a queste forze il teorema di Varignon, trovo la risultante agente su una data retta d'azione; l'intersezione delle due rette d'azione, (delle risultanti delle forze verticali e orizzontali), identificano univocamente il baricentro di questo corpo bidimensionale.

Per corpi dotati di masse distribuite, il baricentro (CG: center of gravity) non appartiene necessariamente ad un punto fisico del corpo dotato di massa.

Ad esempio in virtù della simmetria radiale di un anello, il baricentro è nel centro, laddove non c'è massa.



Esempi di baricentri di figure piane 1-2

- PARALLELOGRAMMA:** G → punto di intersezione delle diagonali
- TRIANGolo:** G → punto di intersezione delle mediane (segmenti che partono da un vertice e arrivano nel punto medio del lato opposto al vertice) dista da ogni lato di 1/3 della rispettiva altezza.
- QUADRILATERO:**

Tracciare diagonali, che definiscono 4 triangoli.

Determinare i baricentri dei 4 triangoli

G → punto di intersezione delle congiungenti dei 4 baricentri

- TRAPEZIO:**

Tracciare un segmento alla base inferiore, pari alla base superiore.

Tracciare un segmento alla base superiore, pari alla base inferiore.

Unire i due estremi dei due segmenti. Considerare segmento che congiunge punti medi delle due basi

- ARCO DI CERCHIO:**

La sua distanza dal centro X<sub>0</sub> è pari al raggio per la corda, diviso la lunghezza dell'arco di cerchio

Determinazione del baricentro di un sistema piano di masse

Esempio architettonico con Sistema di riferimento destrorso positivo originato nel punto z

Frontone di una chiesa (edificio a manica singola)

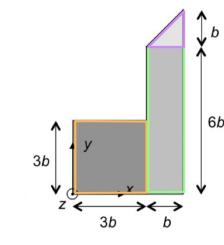
Sulla facciata adiacente alla facciata della chiesa, vi è la facciata di un campanile, sormontato da un timpano triangolare.

Parametrizzazione della geometria

Chiesa → manica: 3b, altezza: 3b

Campanile → larghezza: b, altezza: 6b

Triangolo → altezza: b



Determinarne il baricentro complessivo dei tre elementi

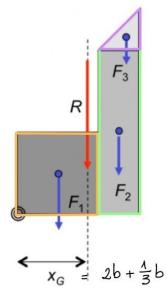
Ci poniamo il problema di sapere quale sarà il punto di applicazione della forza-peso che è il peso proprio di tutti gli elementi strutturali che costituiscono la facciata.

A fronte di carichi verticali/gravitazionali

Se il setto murario fosse soggetto ad un sisma ondulatorio, per il baricentro passerebbe la forza orizzontale che il sisma esprime sul setto murario di facciata che sarà pari alla massa della facciata per l'accelerazione sismica. Qualunque valutazione della risposta strutturale, tanto a carichi verticali quanto a carichi orizzontali, richiede la determinazione del baricentro di questo setto murario.

Dato che lo spessore del muro lo definiamo costante in tutto l'edificio, possiamo trascurarne la terza dimensione e limitarci alla bidimensionalità che vediamo nel piano XY

Trovare YG



$$\rho = [\text{kg}/\text{b}^2] \text{ densità di massa rispetto all'unità di superficie}$$

- $|F_1| = 9b^2 \rho g$
  - $|F_2| = 6b^2 \rho g$
  - $|F_3| = 1/2 b^2 \rho g$
- forze peso soggette ad accelerazione di gravità g  
modulo superficie

1) Determiniamo il baricentro di ognuna delle figure geometriche (quadrato, rettangolo, triangolo)

2) Troviamo il modulo di ognuna delle forze-peso soggette ad accelerazione di gravità g, moltiplicando il modulo della loro superficie per Rho (ρ) ed ulteriormente per g.

3) Quotare le lunghezze necessarie per definire le coordinate dei singoli baricentri rispetto all'origine del sistema di riferimento. Ottengo 3 forze, di cui voglio determinare la posizione della risultante.

4) Teorema di Varignon

-R che ha braccio RxC (segno negativo convenzione del momento che R esprime rispetto al polo Q) = momento risultante (somma algebrica dei tre momenti delle tre forze)

-F1 braccio 3/2b (momento negativo)

F2 braccio 7/2b (3b+B/2)

F3 braccio 11/3b

5) Sostituisco i moduli con i valori trovati  
Posso raccogliere

Riduco ai minimi termini il momento risultante con un comune multiplo (6)

6) Porto in evidenza xG

Se la base della navata era 3b, adesso so che xG è pari a 2b + 1/3b

$$R = F_1 - \underbrace{\quad}_{\text{L'VERSO OPPOSTO AD } y} \quad \cup \quad (9+6+0,5) = -15,5 \rho g b^2$$

$$-R x_G = -F_1 \frac{3}{2} b - F_2 \frac{7}{2} b - F_3 \frac{11}{3} b =$$

$$= -\rho g b^3 \left( \frac{27}{2} + \frac{42}{2} + \frac{11}{6} \right) = -\rho g b^3 \frac{218}{6}$$

$$x_G = \rho g b^3 \frac{218}{6} \frac{1}{R} = \rho b^3 \frac{218}{6} \frac{6}{93 \rho b^2} \approx \frac{7}{3} b$$

$\frac{218}{93}$   
 $15,5 \rightarrow \frac{93}{6}$

**Determinare YG**

Espressioni dei moduli delle forze peso invarianti

I bracci del peso rispetto al polo Q determinato (angolo basso a sinistra) erano già determinati  
Rivalutare modulo del momento risultante, e noto momento forza risultante, ottenere l'ordinata

$$R = +F_1 + F_2 + F_3 = \rho g b^2 (9 + 6 + 0.5) = +15.5 \rho g b^2$$

$$-Ry_G = -F_1 \cdot \frac{3}{2}b - F_2 \cdot 3b - F_3 \cdot \frac{19}{3}b = -\rho g b^3 \left( \frac{27}{2} + 18 + \frac{19}{6} \right) = -\rho g b^3 \frac{208}{6}$$

$$y_G = \rho g b^3 \frac{208}{6} \frac{1}{R} = \rho b^3 \frac{208}{6} \frac{6}{93 \rho g^2} = \frac{208}{93} b \approx 2.24b$$

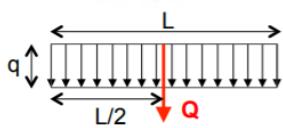
**Risultante di un carico distribuito**

Sfruttiamo concetto di baricentro di una superficie per affrontare una questione tecnica

Alcuni carichi sulle nostre architetture possono essere modellati attraverso il concetto di **carico distribuito**  
Ad un carico distribuito (esempio operai sulla trave) corrisponde un **diagramma di carico** (forza peso complessiva di tutti gli operai distribuita)

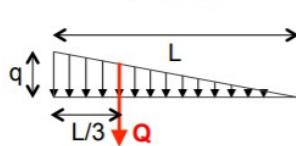
Carico uniformemente distribuito lungo una linea

$$Q = q \cdot L$$



Carico linearmente distribuito lungo una linea

$$Q = q \cdot L/2$$

**Carico uniformemente distribuito lungo una linea L**

Carico distribuito lungo una lunghezza (L), e modulo (q) che corrisponde all'altezza del diagramma di carico rettangolare (modulo di Q non varia lungo L)

Operazione inversa: noto il diagramma di un carico uniformemente distribuito ci proponiamo di valutare la **forza risultante** di quel carico (la forza concentrata che equivale al carico distribuito iniziale dato).

La soluzione è una forza concentrata (Q), il modulo sarà pari all'area del diagramma di carico (essendo rettangolare, la sua area è base (L) x altezza (q) →  $Q = q \times L$ )

Questa risultante Q, ha il verso del carico e agirà su una retta d'azione della medesima direzione del carico, e passerà per il baricentro dell'area di carico.

Nel caso di un diagramma di carico rettangolare, il baricentro si pone all'intersezione delle diagonali che disterà da un estremo della base L/2.

**Carico linearmente distribuito lungo una linea L**

Conosce il massimo modulo ad un estremo di L e si annulla in corrispondenza dell'altro estremo, cosicché il diagramma di carico risulta essere un **triangolo rettangolo** ed il diagramma di carico non è più uniformemente distribuito ma linearmente distribuito lungo una linea L.

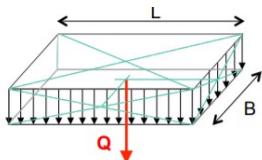
Determinare la sua **forza risultante**: il modulo della risultante è pari all'area del diagramma di carico, la sua retta d'azione passa per il baricentro dell'area di carico

carico distribuito valore Q distribuito lungo L → risultante:  $Q = q \times L/2$

Dove passerà la sua retta d'azione? Per il baricentro del diagramma di carico (che dista da un lato una quantità pari a 1/3 l'altezza costruita su quel lato); la retta d'azione dista dall'estremo dove il carico è massimo, 1/3 della lunghezza su cui il carico è distribuito.

**Unità di misura carico uniformemente/linearmente distribuito**

$$q = (N/m) \quad L = (m) \rightarrow Q = (N)$$

**Carico uniformemente distribuito su una superficie (blocco di carico)**

La **retta d'azione della risultante** passerà per il baricentro del volume (corrispondente ai baricentri delle superfici laterali e di base del volume di carico).  $Q = q \times L \times B$

**Unità di misura carico uniformemente distribuito su una superficie**

$$q = (N/m^2) \quad L, B = (m) \rightarrow Q = (N)$$

**Coppia**

Sistema di forze, costituito da due sole forze che hanno medesimo modulo e direzione, ma versi opposti e agiscono su rette d'azione che sono parallele ma distinte, e la distanza fra le due rette d'azione la chiamiamo **b (braccio della coppia)**.

Due forze ( $v_1$  e  $v_2$ ), aventi stesso modulo ma versi opposti, agenti su rette d'azione parallele  $r_1$  ed  $r_2$

**Proprietà**

- La somma delle due forze/la forza risultante è nulla →  $v_1 + v_2 = F - F = 0$
- La somma dei momenti rispetto ad un polo qualsiasi

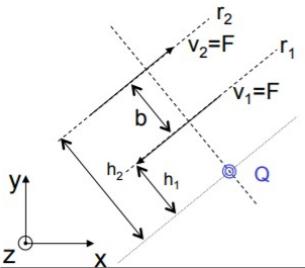
**non è nullo** (diverso da zero)

**non dipende dal polo** che abbiamo scelto ma dal modulo e verso delle forze, e dalla distanza tra le due rette d'azione delle forze (braccio)

Eleggiamo polo Q, per esprimere bracci di  $v_1$  e  $v_2$  rispetto a Q ( $h_1$  e  $h_2$ )

Il **momento risultante della coppia (C)**

di questo sistema di forze è →



$$\begin{aligned} C &= v_1 \cdot h_1 - v_2 \cdot h_2 = v_1 \cdot h_1 - v_2 \cdot (b + h_1) = \\ &= v_1 \cdot h_1 - v_2 \cdot b - v_2 \cdot h_1 = F \cdot h_1 - F \cdot b - F \cdot h_1 = \\ &= -F \cdot b \end{aligned}$$

Posso rappresentare il sistema coppia o dettagliando le due forze e il braccio che le separa, oppure non disegnare le due forze e il braccio, ma semplicemente indicare il momento risultante  $C$  (equivale negli effetti, al sistema delle due forze che definiamo coppia).

### Composizione di forza e coppia

Ho una forza  $F$  che agisce su una retta d'azione  $r$  e una coppia  $C$

Qual è la risultante della composizione di una forza e di una coppia?

Premesse

- La coppia dipende dalla distanza relativa tra le due forze, quindi non è necessario indicare il punto di applicazione.
- Noto il valore di una coppia, sono in grado di definire univocamente il modulo delle due forze e il braccio che generano quel momento? No, perché ci sono infinite combinazioni di modulo della forza e di braccio che restituiscono la stessa coppia.

Posso decidere che la coppia  $C$  sia frutto di due forze che hanno modulo, pari al modulo della forza data  $F$ . Definisco un particolare valore del braccio che garantisce che la coppia abbia modulo  $C$  se ottenuta da due forze (che costituiscono il sistema coppia) di modulo  $F$ .

Posso riscrivere il sistema iniziale di forza + coppia (due forze che agiscono su rette d'azione distanti  $b$ , aventi stesso modulo di  $F$ ) come un sistema di sole forze

La forza che ha verso opposto alla forza iniziale  $F$ , la posiziono sulla stessa retta d'azione della forza  $F$ . Passiamo così da una rappresentazione di una forza e una coppia → alla **rappresentazione di tre forze**

Abbiamo quindi due forze di uguale modulo, verso opposto, agenti sulla medesima retta d'azione ( $F$  ed  $F''$ ) che si **eliminano fra di loro**.

Risultato: la **risultante** della composizione di forza  $f$  e coppia  $c$  è una forza  $F$  di ugual modulo della forza iniziale ma che è stata trasportata su una retta d'azione che dista  $b$  dalla retta d'azione della forza originaria.

Posso calcolare per entrambi i sistemi quali siano **forza risultante e momento risultante rispetto al polo Q**. In entrambi i casi la forza risultante è pari ad  $F$  e il momento risultante intorno al polo  $Q$  è pari a  $-F \times d$

$$\sum_r F = F$$

$$\sum_Q M = -F \cdot (b + d) + C = -F \cdot (b + d) + F \cdot b = -F \cdot d$$

$$\sum_r F = F$$

$$\sum_Q M = -F \cdot d$$

A cosa corrisponde la composizione di una forza e di una coppia?

Ad una **forza identica alla precedente ma con posizione diversa**

### Momento di trasporto

Una forza  $F$  può essere trasportata parallelamente a se stessa per una distanza  $b$  se si aggiunge un momento di trasporto  $M$ , di intensità  $M = F \times b$ , dove  $b$  è la distanza tra la nuova retta d'azione della forza  $r'$  e la precedente  $r$ .

Ad  $F$  aggiungo due forze messe su  $r'$ , queste due realizzano una coppia.

Ho ottenuto lo scopo di spostare  $F$  aggiungendo una coppia che esprime un momento pari alla forza per la distanza per cui voglio trasportarla.

Il sistema iniziale e il sistema finale hanno la **medesima forza risultante e momento risultante** rispetto al polo  $Q$ .

$$\sum_r F = F + F' + F'' = F + F - F = F$$

$$\sum_Q M = -F \cdot d - F' \cdot (b + d) + F'' \cdot (b + d) = -F \cdot d$$

$$\sum_r F = F$$

$$\sum_Q M = -F \cdot d$$

### Applicazione del momento di trasporto 1 “Fastidio modellistico”

Catena rialzata dell'arco che eliminava la spinta

L'arco spinge alle imposte con forze orizzontali  $F$

Considero solamente un semi arco per semplicità

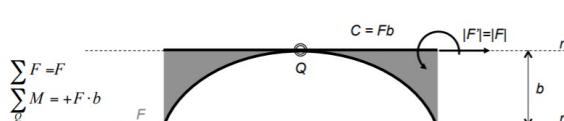
La **forza risultante** è  $F$  stessa, e il **momento risultante** rispetto al polo  $Q$  che eleggo sulla chiave di volta è  $F \times b$  (positivo)

Perchè disturba avere la forza in quella posizione?

Perchè se modello la spinta dell'arco all'imposta, **non capisco come la catena possa equilibrarla** (la catena esprime una forza che agisce su una retta d'azione che non è all'imposta, ma alla catena).



Posso figurarmi di ipotizzare che sulla retta  $r'$  che passa per la volta, di aggiungere due forze  $F$  di verso opposto e modulo pari ad  $F$ ; Mi rendo conto che la  $F$  originaria ed  $F''$  realizzano una coppia → momento di trasporto che aiuta a portare  $F$  da  $r$  ad  $r'$ . Ma perchè il sistema sia equivalente devo aggiungere un **momento di trasporto**.



La catena fa sì che questa spinta F sia ripresa da spinta F trasportata sopra.

Le due spinte sembrano messe in comunicazione dalla catena.

Perche è importante l'unghia di muratura → elemento strutturale che dovrà essere in grado di resistere a questa coppia.

Ho usato un momento di trasporto per ottenere la rappresentazione statica del problema, equivalente alla iniziale che è più congeniale nel fornire interpretazione meccanica di quello che sto osservando.

- Risultante di sistemi di forze-peso agenti su **stessa retta d'azione**
- Risultante di sistemi di forze-peso agenti su **rette d'azione planari, distinte**, non parallele
- Risultante di sistemi di n forze agenti su **rette d'azione planari, distinte**, non parallele, sia che si incontrassero in **unico punto di intersezione**, o a due a due in **punti di intersezione diversi**
- Risultante di sistemi di forze agenti su rette di forze **planari ma parallele**
- Risultante di **carichi distribuiti** che equivalgono eventualmente a sistemi di forze
- Risultante di sistema di forze particolari: **coppia**

### **CONDIZIONI DI EQUILIBRIO – VINCOLI**

Definizione parziale di equilibrio, per un sistema di forze agenti sulla medesima retta d'azione:  
valutiamo la risultante e consideriamo quale **equilibrante**, quella forza che sommata alla risultante da come risultante ulteriore il **vettore nullo**.

Estendiamo la definizione di equilibrio al caso generale di un sistema qualunque di forze, e che agiscono non necessariamente su rete d'azione complanari.

**Sistema di forze equilibrato:** la risultante e il momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi sono nulli  
Vogliamo che tutti gli effetti della forza risultante siano nulli, e che tutte le rotazioni siano nulle intorno a tutti i punti.

Duplice condizione: entrambi sono condizioni **necessarie ma da sole non sufficienti** all'equilibrio.

**Equazioni di equilibrio:** relazioni matematiche che legano tra loro le forze e le coppie che costituiscono il sistema

#### 1) **Risultante nulla**

R è la risultante che deriva dalla composizione (sommatoria) di tutte le i-esime forze.

Perchè sia in equilibrio dobbiamo verificare che questa risultante sia uguale al vettore nullo → equazione → Σ estesa a tutte le forze del sistema

#### 2) **Momento risultante nullo**

Espressione del vettore momento, risultante rispetto ad un polo A qualsiasi.

Come posso esprimere un momento risultante del sistema di forze?

E' pari alla sommatoria dei momenti espressi dalla singola i-esima forza rispetto al polo A, e dovrà aggiungere le eventuali coppie/momenti che caratterizzano compiutamente la j-esima coppia.

Dovrò verificare, se voglio che il sistema sia in equilibrio, che il momento risultante sia = al vettore nullo.  
→ Σ estesa ai momenti di tutte le forze calcolati rispetto ad un polo A qualsiasi, e a tutte le coppie del sist

Dobbiamo posizionare le equazioni a sistema, perchè devono essere simultaneamente osservate le uguaglianze, altrimenti non necessariamente c'è l'equilibrio.

Bisogna cercare di trattare le equazioni di equilibrio scritte in termini vettoriali, ma scriverle come se fossero scalari. Per farlo è necessario valutare, invece delle forze, ognuna sulla loro retta d'azione comunque diretta, di ogni forza/momento considerarne le componenti secondo le **tre direzioni del sistema di riferimento cartesiano ortogonale scelto**.

Per ognuna di esse applico la scomposizione della forza nelle direzioni degli assi X, Y, Z

Per ognuna delle forze abbiamo 3 componenti (di 100 forze → abbiamo 300 componenti/forze)

### **Equilibrio nello spazio e nel piano**

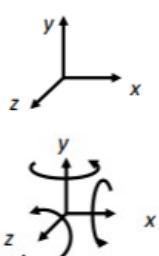
**Equilibrio nello spazio:** ognuna delle equazioni vettoriali può essere scritta sotto forma di tre equazioni Possiamo osservare l'equilibrio non più delle forze ma delle componenti delle forze e dei momenti nelle direzioni X, Y, Z, invece di avere due condizioni di equilibrio e due equazioni, avremo sempre due condizioni di equilibrio ma in 6 equazioni:

**Equilibrio alla traslazione:** 3 equazioni di proiezione su tre direzioni

- Equilibrio delle componenti secondo **X** delle forze
- Equilibrio delle componenti secondo **Y** delle forze
- Equilibrio delle componenti secondo **Z** delle forze

**Equilibrio alla rotazione:** 3 equazioni di momento rispetto a 3 rette

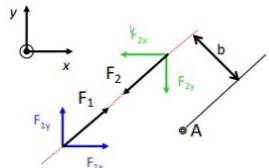
- Equilibrio dei momenti intorno ad **X**
- Equilibrio dei momenti intorno ad **Y**
- Equilibrio dei momenti intorno ad **Z**



Passiamo da un sistema di due equazioni vettoriali, ad avere un sistema di sei equazioni (formalmente vettoriale, ma in realtà pseudo-scalare, perchè per descrivere compiutamente i vettori mi basteranno i moduli segnati).

Queste equazioni che verificano l'equilibrio sono così importanti nella statica che si chiamano spesso **equazioni cardinali della statica**.

Una forza comunque inclinata nello spazio, è attesa avere tre componenti (una per ogni direzione che il sistema di riferimento descrive)



**Equilibrio nel piano :** se il mio sistema di forze è piano, e se sto discutendo l'equilibrio di quel sistema di forze, allora per discutere l'equilibrio del piano avrò bisogno di solo **tre equazioni di equilibrio** (se ho delle forze nel piano XY, ogni forza la posso scomporre nelle componenti secondo le direzioni X ed Y, avranno una componente in direzione Z? No, quindi è inutile che scriva l'equazione dell'equilibrio delle componenti secondo Z, perchè l'identità sarà pari a 0).

Se le forze sono sul piano, allora i momenti che esprimeranno rispetto ad un polo nel piano saranno momenti che avranno come retta d'azione, rette sempre e solo dirette come Z, quindi sarà sufficiente descrivere l'equilibrio dei momenti intorno a Z.

2 equazioni di equilibrio **lungo X e lungo Y** che tradurranno in forma pseudo-scalare l'unica **equazione di equilibrio della forma risultante**.

1 equazione di equilibrio dei **momenti intorno a Z**, che sostituirà l'unica **equazione vettoriale di equilibrio dei momenti**.

Caso elementare:

due forze  $F_1$  e  $F_2$ , agiscono sulla medesima retta d'azione, hanno moduli uguali e versi opposti.

$$\text{Equazione risultante } \bar{R} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{1x} - F_{2x} = 0 \\ F_{1y} - F_{2y} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Equazione di momento risultante intorno al polo A } M_R = -F_1 \cdot b + F_2 \cdot b = 0$$

### Equilibrio nel piano

Le equazioni nel piano si riducono a 3:2 di proiezione secondo direzioni contenute nel piano ed una di momento ad una retta perpendicolare al piano

se scrivo equilibrio delle forze secondo X, equilibrio delle forze secondo Y, l'equilibrio dei momenti intorno a Z → scrivo tre equazioni di equilibrio che metterò nel sistema (perchè dovranno essere simultaneamente verificate per garantire l'equilibrio).

Queste tre equazioni impongono delle **condizioni indipendenti** (quando valuto forze di direzione X, per definizione queste non avranno componenti in direzione Y e viceversa, quindi è evidente che le condizioni che imporranno saranno perfettamente indipendenti).

L'importante è porre tre condizioni attraverso tre equazioni in maniera che siano indipendenti.

In alternativa:

- **2 equazioni di momento intorno a due poli distinti** e una sola **equazione di equilibrio** delle forze lungo una direzione delle componenti che non sia perpendicolare alla congiungente dei poli intorno ai quali ho valutato i momenti.

Se uno una direzione per le componenti delle forze che invece è perpendicolare e alla congiungente dei poli, questa terza equazione non è più indipendente.

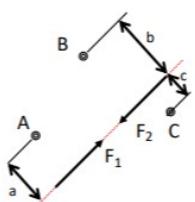
$$M_A = \sum_{i=1}^n F_i \cdot br_A = 0 \qquad M_B = \sum_{i=1}^n F_i \cdot br_B = 0$$

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

- **3 condizioni di equilibrio dei momenti intorno a tre poli non allineati**

$$M_A = \sum_{i=1}^n F_i \cdot br_A = 0 \qquad M_B = \sum_{i=1}^n F_i \cdot br_B = 0$$

$$M_C = \sum_{i=1}^n F_i \cdot br_C = 0$$



### Equilibrio nel piano: COROLLARI

Abbiamo l'equilibrio nel piano, se quelle tre equazioni sono uguali a 0

Ci sono casi in cui non vale neanche la pena di scrivere quelle equazioni per accorgerci che quel sistema di forze è in equilibrio oppure no.

Ci sono casi in cui sappiamo a priori che l'equilibrio non ci può essere.

- Sistema di due sole forze, sarà in equilibrio (condizione necessaria ma non sufficiente) se le due forze agiranno sulla **medesima retta d'azione**.
- Sistema costituito da 3 forze, sarà in equilibrio soltanto se queste sono **complanari e concorrenti o parallele**

Fino ad ora abbiamo imposto delle condizioni di equilibrio che si basano sulle forze, ma sappiamo che ad ogni forza equivale un corrispettivo cinematico (perchè la forza è la causa che su un corpo dotato di massa ha un effetto → traslazione/spostamento (della forza), rotazione (del momento)).

Dire che il momento risultante è nullo, e che la forza risultante è nulla → equivale a dire che la traslazione e la rotazione del corpo sono nulle.

Come descriviamo il vettore traslazione e rotazione?

Ogni traslazione e rotazione nello spazio possono essere descritte da tre componenti (lungo X, Y, Z)

Queste componenti si chiamano **gradi di libertà** (componenti del moto di un corpo rigido nello spazio)

Nello **spazio** un corpo rigido ha **6 gradi di libertà (GdL)**

Se descrivo i 6 gradi di libertà che fanno muovere un corpo da un punto A ad un punto B, ho descritto perfettamente la posizione finale del corpo, in tutte le sue parti, perchè la rotazione fa sì che tutti i punti abbiano la medesima velocità angolare, perchè il corpo è rigido.

Nel **piano** un corpo rigido ha **3 gradi di libertà (GdL)**

Traslazione lungo X ed Y, rotazione intorno a Z  
imporre che il momento risultante intorno a Z sia nullo, implica imporre che il grado di libertà di rotazione intorno a Z si annulli (nulla è la causa, nullo è l'effetto).

### VINCOLI E REAZIONI VINCOLARI NEL PIANO

A fonte della variabilità nello spazio e nel tempo durante la vita utile dell'architettura possiamo figurarci che sia probabile che queste forze applicate da madre natura siano naturalmente in equilibrio? Diano naturalmente la risultante nulla? No.

Eppure l'architetto deve garantire le prestazioni meccaniche dell'architettura, e la prima è l'**equilibrio**. Come possiamo fare per garantire l'equilibrio? Cosa vuol dire progettare l'equilibrio?

Da unto di vista **statico**, aggiungere ad un sistema di forze dato, (dalla funzione dell'architettura/madre natura) delle altre **forze** che decidiamo noi di mettere e si fanno **garanti dell'equilibrio**.

Progettare/eliminare dei gradi di libertà laddove non siano uguali a 0

E' più congeniale la progettazione cinematica, che non la progettazione statica.

Eliminare gradi di libertà vuol dire progettare delle strutture, degli elementi strutturali che annullino le componenti di spostamento degli elementi strutturali di cui ci interessa garantire l'equilibrio.

Queste strutture che eliminano gradi di libertà vengono chiamati **vincoli reali** (calcestruzzo, acciaio...)

Versione semplificata del vincolo reale → **vincolo ideale** (svolge la medesima funzione/ rappresenta molteplicità dei vincoli materiali reali che potremmo progettare, fornendo una loro categorizzazione che obbedisce alla ragione fondamentale del vincolo: è ispirata ai gradi di libertà che il vincolo elimina, dato un corpo rigido).

vincolo	INCASTRO	CERNIERA	DOPPIO PENDOLO	CARRELLO
GdL consentiti	0	1	1	2
Componenti dello spostamento consentite	—	$\alpha_z$	$u_y$	$u_x \alpha_z$
Gradi di vincolo	3	2	2	1
Componenti delle reazioni vincolari	$R_x R_y M_z$	$R_x R_y$	$R_x M_z$	$R_y$

**Incastro:**

3GDV → 2 traslazioni e 1 rotazione (in grado di vincolare una struttura)

Sistema di riferimento assoluto (x,y,z)

Segmento spesso che indica corpo rigido che vogliamo vincolare

Il resto del pittogramma nero è il pittogramma del vincolo

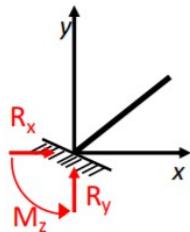
Questo vincolo, e componenti di spostamento consente al corpo rigido vincolato (GdL)?

Non consente nessuna traslazione e nessuna rotazione

Gradi di vincolo, che il vincolo esprime/quante sono le componenti/GdL annullati? 3

Quali sono le forze che il vincolo esprime (reazioni vincolari) e che saranno utili per garantire l'equilibrio in senso statico (risultante e momento risultante nulli)

R: reagente (forza reagente) secondo ed y, e il momento intorno all'asse z



Il vincolo annulla i gradi di libertà, ma facendolo produce reazioni vincolari (prodotto di scarto statico di un "ammazzamento/annullamento" cinematico)

Reazione vincolare che l'incastro esprime lungo X:  $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + R_x = 0$

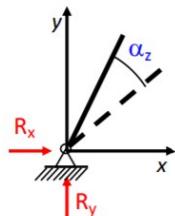
$R_x$  è incognito, ma posso determinarlo perché sarà l'unico modulo e verso che assicura che questa equazione di equilibrio sia verificata, mi consente di assicurare l'equilibrio.

**Cerniera:**

Gradi di libertà: 1

Gradi di vincolo espressi: 2 (tranne rotazione  $\alpha$  intorno a z)

Reazioni vincolari espresse  $R_x$  ed  $R_y$

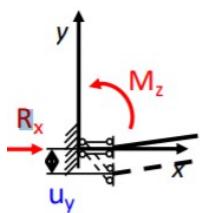
**Doppio pendolo:**

Gradi di libertà: 1

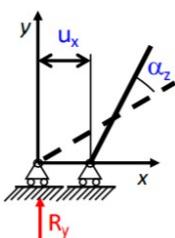
Gradi di vincolo consentiti: 2

una delle due componenti di traslazione ( $u_y$  traslazione intorno y = direzione che risulta essere perpendicolare alle due barrette che realizzano il pittogramma)

Elimina la componente traslazione lungo x e il momento intorno a z



Medesimo pittogramma dell'incastro, sormontato da un triangolo e a volte da un pallino sopra il vertice superiore (centro di rotazione lasciato libero dal vincolo)  
il doppio vincolo è ancora costituito dal pittogramma dell'incastro  
due semicerniere da ognuna delle quali parte una bacchetta  
altre due semicerniere e una piastra/stanghetta, da cui diparte il corpo rigido.

**Carrello:**

Meno efficace

GdL consentiti: 2

Componenti dello spostamento consentite:  $u_x$ ,  $\alpha_z$

elimina un grado di libertà esprimendo un grado di vincolo (traslazione perpendicolare al piano di scorrimento del carrello,  $R_y$ )

Pittogramma simile alla cerniera, ma al di sotto del triangolo ci sono due altri cerchietti che indicano due rotelline su cui si muove il carrello/appoggio

Incastro e cerniera esprimono gradi di vincolo che non dipendono dalla giacitura del vincolo medesimo  
Viceversa il doppio pendolo e il carrello dato che consentono un grado di libertà di traslazione, non possono dipendere dalla loro giacitura.

Generalizzazione per doppio pendolo e carrello

Definizione più generale

Sistema di riferimento locale che ha l'asse t tangente al piano di scorrimento del carrello (dell'incastro doppio pendolo) e asse n ortogonale/normale ai precedenti (parallelo alle viellette)

In generale il doppio pendolo permette una componente di traslazione secondo t, così come anche il carrello, mentre eliminano le componenti di traslazione secondo n.

vincolo	DOPPIO PENDOLO	CARRELLO
GdL consentiti	1	2
Componenti dello spostamento consentite	$u_t$	$u_t \alpha_z$
Gradi di vincolo	2	1
Componenti delle reazioni vincolari	$R_n \quad M_z$	$R_n$

Più in generale il carrello elimina il grado di libertà normale (ortogonale) al piano di scorrimento.

E altrettanto dicasi per il doppio pendolo

- **Definizione generale di isostaticità:** un sistema di corpi si dice **isostatico** quando i gradi di vincolo che applico al sistema di corpi è **strettamente sufficiente per eliminare ogni grado di libertà**/ogni componente dello spostamento rigido del corpo.

Qualunque sia il numero di corpi, nel piano o nello spazio, e quindi qualunque sia il numero di gradi di libertà che devono annullare (pari al numero di corpi x3, nel piano o x6, nello spazio), il mio sistema di corpi si dice isostatico quando ho assoldato il numero strettamente sufficiente di vincoli per annullare tutti i gradi di libertà.

- **Definizione generale di iperstaticità:** un sistema di corpi si dice **iperstatico** quando esistono dei **gradi di vincolo sovrabbondanti**, cioè che si possono togliere senza che si renda possibile alcun movimento rigido.

Numero di risorse di vincolo maggiore dei gradi di libertà.

Può essere più svantaggioso, perché più elaborato matematicamente discutere le condizioni di equilibrio per un corpo iperstatico.

Quando un sistema è iperstatico non è possibile determinare le condizioni di equilibrio sulla scorta delle sole equazioni di equilibrio.

- **Definizione generale di labilità:** sistema di corpi si dice **labile** quando i gradi di vincolo risultano insufficienti ad impedire ogni movimento rigido.

Architettura soggetta a cinematicismi → crollo

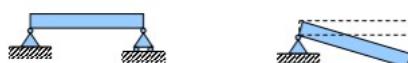
Queste reazioni vincolari sono eventualmente esprimibili dal vincolo, e potranno variare durante la vita utile della struttura, in modulo e verso, per garantire sempre l'equilibrio, anche al variare delle forze applicate.

Relazioni quantitative che permettano di capire quando un corpo si dice isostatico, iperstatico o labile.  
Esempi di corpi vincolati

### 1) Struttura: corpo, cerniera e carrello/appoggio

Struttura

-1 grado di vincolo



Come posso capire se questo corpo è isostaticamente vincolato?

Mi è sufficiente degradare un vincolo eliminando un grado di vincolo

il carrello esprime 1 grado di vincoli, quindi degradarlo di un grado di vincolo vuol dire far sparire il carrello. → rimane solo la cerniera.

Quel corpo rigido potrà avere un centro di istantanea rotazione intorno alla cerniera, perché lascia libero il grado di libertà di rotazione.

La seconda risulta essere una condizione di **labilità**.

Per ottenere la condizione di labilità è stato sufficiente togliere un grado di vincolo

La prima è una condizione di **isostaticità** (strettamente necessaria all'isostaticità).

### 2) Portale: cerniera e carrello



Togliamo alla cerniera un grado di vincolo → diventa carrello, che potrà avere scorrimento verticale o orizzontale. Immaginiamo di eliminarlo lungo x → il portale diventa struttura vincolata da due carrelli

La prima → **isostatica**

La seconda → **labile**

### 3) Mensola: incastro ad un estremo



Possiamo degradare l'incastro togliendoli un grado di vincolo

Se tolgo grado di vincolo alla rotazione → diventa una cerniera

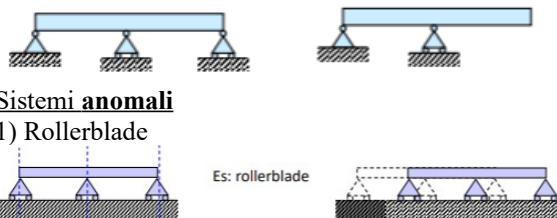
In questo caso, però è stato rimosso un grado di vincolo di traslazione → è diventato un doppio pendolo

La prima → **isostatica**

La seconda → **labile**

4) Unico corpo rigido vincolato con una cerniera e due carrelli

Se degrado un grado di vincolo (eliminando un carrello) → sistema di vincolo una volta **iperstatico**



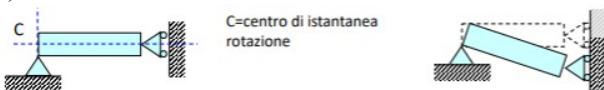
Un sistema di vincolo anomalo è un sistema di vincolo potenzialmente il numero dei gradi di vincolo elimina tutti i gradi di libertà, ma questo non avviene perché i gradi di vincolo sono distribuiti tra i gradi di libertà in maniera non opportuna.

Ho più vincoli (es 3), e due di questi hanno eliminato lo stesso grado di libertà.

Uno dei carrelli non è stato orientato con piano di giacitura verticali.

Ho tre gradi di libertà e tre gradi di vincolo, non spesi bene per eliminare tutti i gradi di libertà

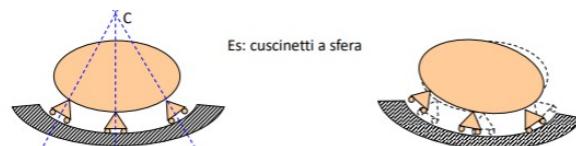
2) Centro di istantanea rotazione



Se il piano di scorrimento del carrello lo oriento in maniera tale per cui la retta d'azione della forza reagente espressa normalmente al piano di scorrimento del carrello e le due rette d'azione delle forze reagenti delle forze espresse dalla cerniera si incontrano in un unico punto → **centro di istantanea rotazione** (la struttura nell'ambito delle piccole rotazioni può essere soggetta a questo determinato cinematicismo in figura)

3) Cuscinetti a sfera

Corpo rigido vincolato con un numero n di carrelli che hanno i loro piani di scorrimento tali per cui le rette d'azione delle forze reagenti si incontrano tutte in un punto C al finito (centro di istantanea rotazione).



**Un sistema di vincolo è sicuramente anomalo, laddove le rette d'azione di tutte le forze reagenti espresse dai vincoli si incontrano nello stesso punto, sia esso al finito (rotazione) o all'infinito (traslazione).**

Fin'ora ho immaginato di considerare un corpo rigido e di volerne eliminare i gradi di libertà/di annullarli rispetto ad un sistema di riferimento assoluto (x,y,z).

Altra condizione: voler eliminare dei gradi di libertà di un corpo rigido, non più rispetto al riferimento assoluto, ma rispetto ad un altro corpo rigido → caso architettura composta da molti corpi rigidi.

### I vincoli interni nel piano

questi vincoli che limitano i gradi di libertà relativi tra un corpo rigido e l'altro si chiamano vincoli interni, perché sono interni al sistema di corpi rigidi/alla struttura/architettura

vincolo	CERNIERA	DOPPIO PENDOLO
Gradi di libertà	1	1
Componenti dello spostamento	$\alpha_z$	$u_y$
Gradi di vincolo	2	2
Componenti delle reazioni vincolari	$R_x \ R_y$	$R_x \ M_z$

Cerchietto: cerniera interna

Un corpo, (stanghetta superiore) ha un grado di libertà consentito, ma non definito rispetto al sistema di riferimento assoluto x,y ma di una rotazione relativa di un corpo rispetto all'altro.

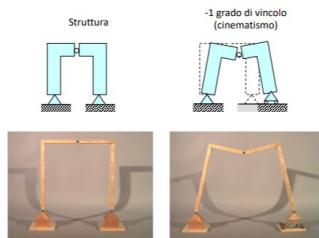
$R_x$  e  $R_y$  → componenti di forza che un corpo rigido applica all'altro al fine di eliminare i gradi di libertà corrispondenti.

Tipico esempio di cerniera interna: articolazioni del nostro corpo

Il doppio pendolo segue la stessa definizione data per il vincolo esterno, ma questa volta al posto del pittogramma dell'incastro c'è un altro corpo rigido (orientato verso x,y, unite dalle due viellette)

Traslazione relativa di un corpo rispetto all'altro ( $u_y$ )  
I due corpi si scambiano reazioni vincolari interne che consentono di annullare la traslazione secondo x e la rotazione intorno a z ( $R_x \ M_z$ ).

Incastro interno: quando ho due corpi rigidi, internamente incastrati → diventano un unico corpo rigido qualunque punto di un corpo rigido equivale ad un incastro interno.



### Esempi di corpi vincolati

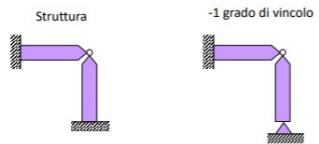
#### Due corpi rigidi formati ad L

Hanno vincoli esterni? Le due cerniere

Hanno vincoli interni? Una cerniera che li unisce

E' una struttura isostatica? Secondo intuizione cinematica possiamo degradare un grado di vincolo, una delle due cerniere diventa carrello, e ci rendiamo conto che la struttura diventa labile.

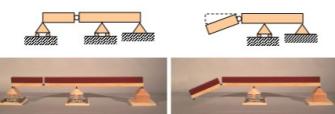
Vuol dire che questa condizione di vincolo, con un grado di vincolo in più è resa statica.



#### Portale zoppo (ritto e trasverso) incastrati, fra di loro incernierati

Degradiamo un grado di vincolo, facciamo diventare l'incastro una cerniera. Verosimilmente questa struttura era almeno una volta iperstatica.

Possiamo eliminare una altro grado di vincolo, e ritorneremmo al caso del portale a due cerniere.



#### Trave Gerber

Due corpi rigidi con tanti vincoli esterni (due appoggi e una cerniera) e una cerniera esterna.

E' isostatica perché eliminando un grado di vincolo, per esempio un carrello, vediamo che non tutta la struttura è soggetta ad un cinematicismo, ma almeno un corpo rigido è soggetto ad una rotazione.

E' sufficiente che un corpo che costituisce il sistema abbia un grado di libertà concesso perché la struttura non sia più isostatica.

Anche in questo caso esistono i sistemi anomali

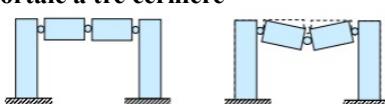
#### Sistemi anomali

#### Gerber anomala

pur avendo molti vincoli esterni, e interni, è comunque consentito un cinematicismo locale, dovuto alla maldisposizione dei vincoli interni



#### Portale a tre cerniere



**Caso ricorrente di vincoli anomali interni:** quando vi sono tre cerniere interne consecutive (due interne o una esterna consecutiva senza l'interposizione di altri vincoli esterni o interni) che giacciono tutti sullo stesso allineamento.

Vi è sempre la possibilità di una rotazione relativa di un corpo rispetto ad un altro.

Dato un sistema di corpi rigidi, e di vincoli interni ed esterni, siamo in grado di stabilire quantitativamente e rigorosamente se lo schema di vincolo realizza una struttura isostatica iperstatica o labile?  
Si, a meno delle maldisposizioni vincolari/sistemi anomali.

Confrontare il numero di gradi di libertà che sono tipici del sistema di corpi, e il numero di gradi di vincolo che sono tipici dei vincoli che a questi corpi applichiamo.

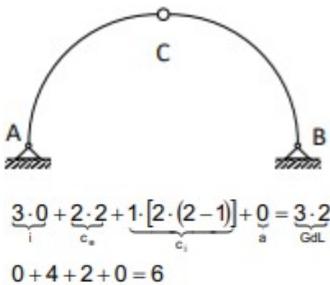
- Se il numero di gradi di libertà è **uguale** al numero dei gradi di vincolo, allora questa è una condizione necessaria all'**isostaticità**.
- Se il numero dei gradi di libertà è **maggiore** al numero del numero dei gradi di vincolo , questa è una condizione necessaria alla **labilità**.
- Se il numero di gradi di libertà è **minore** del numero dei gradi di vincolo, questa è una condizione necessaria alla **iperstaticità**.

Esempio di computo dei vincoli**Condizione di isostaticità:**

$$3i + 2c_e + 2 \sum_{c_i} (r-1) + a = 3n$$

$$3i + 2 \left( c_e + \sum_{c_i} (r-1) \right) + a = 3n$$

**Struttura ad arco a tre cerniere**, distinguiamo due cerniere (che formano due semi-archi) esternamente all'imposta sono vincolati da due vincoli esterni di cerniera (in A e B) ma necessariamente hanno anche un vincolo interno (cerniera in C).



$$\begin{aligned} & \underbrace{3 \cdot 0}_{i} + \underbrace{2 \cdot 2}_{c_e} + \underbrace{1 \cdot [2 \cdot (2-1)]}_{c_i} + \underbrace{0}_{a} = 3 \cdot 2 \\ & 0 + 4 + 2 + 0 = 6 \end{aligned}$$

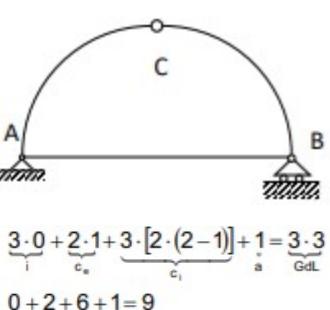
Numero dei gradi di libertà complessivi = a 3 gradi di libertà per ogni corpo rigido n → 6  
Se ci fosse stato un incastro, ogni incastro avrebbe espresso 3 gradi di vincolo. → (3x0)

A questi dobbiamo aggiungere i gradi espressi dalle cerniere esterne → (+2x2)

a: appoggi/carrelli → (1x0)

r: numero di corpi rigidi articolati dalla cerniera interna

Se ho n corpi rigidi articolati dalla cerniera, la cerniera esprimerà tanti gradi di vincolo quanti sono i corpi rigidi -1 (usato come riferimento) moltiplicato x2 (perchè per ogni corpo rigido articolato elimina i due gradi di libertà e traslazione relativa) → 1x(2x(2-1))



$$\begin{aligned} & \underbrace{3 \cdot 0}_{i} + \underbrace{2 \cdot 1}_{c_e} + \underbrace{3 \cdot [2 \cdot (2-1)]}_{c_i} + \underbrace{1}_{a} = 3 \cdot 3 \\ & 0 + 2 + 6 + 1 = 9 \end{aligned}$$

Quanti corpi rigidi riconosciamo in questo sistema di corpi? 3 (AB, CB, AB → catena)

Gradi di libertà complessivi nel piano: 9 → (3x3) → 3x0

Quante cerniere esterne riconosciamo? 1 → +2x1

Quanti appoggi/carrelli esterni riconosciamo? 1 → +1x1

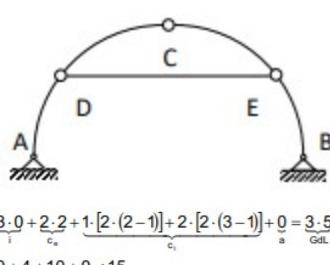
Quanti vincoli interni riconosciamo? 3

(C: articola corpi AB e CB, A: articola corpi CA e AB, B: articola corpi CB e BA)

A e B eliminano gradi di libertà complessivi della struttura rispetto ad un riferimento assoluto, ma sono allo stesso tempo vincoli interni perchè articolano fra di loro attraverso cerniere interne, due corpi.

Quanti corpi rigidi sono articolati da queste cerniere interne? In C: 2, in A: 2, in B: 2 → 3x(2x(2-1))

I gradi di libertà sono egualati dai gradi di vincolo, e quindi questa è la condizione necessaria affinchè questa struttura sia **isostatica**.



$$\begin{aligned} & \underbrace{3 \cdot 0}_{i} + \underbrace{2 \cdot 2}_{c_e} + \underbrace{1 \cdot [2 \cdot (2-1)]}_{c_i} + \underbrace{2 \cdot [2 \cdot (3-1)]}_{c_i} + \underbrace{0}_{a} = 3 \cdot 5 \\ & 0 + 4 + 10 + 0 < 15 \end{aligned}$$

Arco con catena parzialmente rialzata

Quanti corpi rigidi riconosciamo? 5 (le cerniere in D ed E non articolano solo il semiarco con la catene ama interrompono ogni semiarco in due quarti di arco).

Gradi di libertà complessivi nel piano: 15 (3x5) → 3x0

Due cerniere esterne → +2x1

Non abbiamo incastri o carrelli

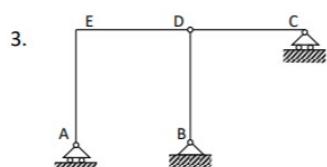
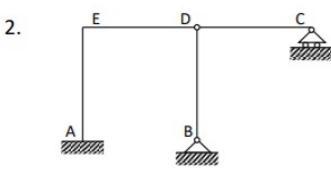
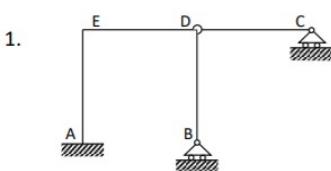
Dobbiamo guardare alle cerniere interne: in C(2) → (2x(2-1)), in D ed E(3) → (2x(3-1))

Il numero dei gradi di libertà è maggiore dei numeri gradi di vincolo → **struttura labile**

C'è la condizione necessaria, ancorchè sufficiente che sia una volta labile (il numero dei radi di libertà è maggiore a una unita del numero dei gradi di vincolo).

Dobbiamo immaginare un cinematismo. → unghia (DC-CE-ED) come corpo rigido che può traslare nell'ambito dei piccoli spostamenti perchè le porzioni di arco AD ed EB possono ruotare in A e in B.

Valutare quali di questi sistemi di corpi risulta essere isostatico, labile o iperstatico.



**Es. 1 Iperstatica 1 volta**

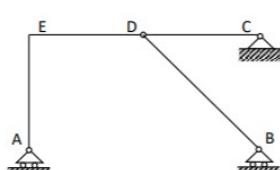
Semicerniera: un corpo rigido la percorre senza essere interrotto.

Cerniera D unisce due soli corpi rigidi

**Es. 2 Iperstatica 1 volta**

**Es. 3 Labile 1 volta**

**Es. 4 Labile 1 volta**



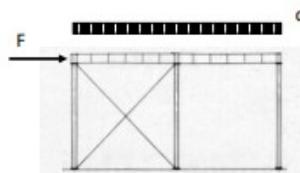
### Concetto di schema statico

Nome che diamo al modello fisico matematico con cui vogliamo descrivere la struttura che stiamo analizzando/progettando.

Per analizzare il comportamento di una struttura è necessario formulare un modello meccanico semplificato ma verosimile → **schema statico**, che deve comprendere: (elementi che servono per qualificarlo)

- la descrizione della **geometrica** dell'elemento strutturale
- la descrizione delle **condizioni di vincolo** esterne ed interne
- la descrizione delle **azioni applicate** alla struttura

N.B. In questa accezione, è possibile formulare, per la medesima struttura, differenti schemi statici in funzione, ad esempio, delle differenti condizioni di carico a cui può essere sottoposta o del differente grado di approssimazione dello studio.

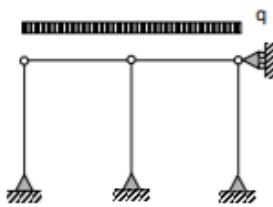


Edificio a due maniche monopiano

Durante la sua vita utile, quest'architettura a quali azioni sarà soggetta?

Possiamo immaginare un carico distribuito gravitazionale sul trasverso, e un carico orizzontale puntiforme sul ritto-trasverso (effetto del vento che la struttura di facciata riporta al nodo strutturale superiore)

Ci proponiamo di realizzare due schemi statici: uno che discuta l'equilibrio alle sole **forze verticali**, e un altro che discuta l'equilibrio alle sole **forze orizzontali**.



Capire come si comporta il mio organismo strutturale a fronte di carichi verticali e orizzontali.

Caso carichi verticali: perché il carico qualifica lo schema statico?

Perchè se sto considerando un carico verticale, ha senso considerare esplicitamente la struttura di controvento? No perchè è vocata unicamente all'equilibrio dei carichi orizzontali; sarebbe tempo perso includerla nel modello matematico che sto pensando per i carichi verticali.

15 gradi di libertà, e 14 gradi di vincolo → **struttura una volta labile**

Ognuno di questi campi potrà assumere il cinematismo di un pendolo inverso.

Non posso scrivere uno schema statico labile perchè poi non posso applicare le leggi dell'equilibrio, allora introduco **carrellino** che non corrisponde a vincolo reale, ma è un vincolo ideale equivalente perchè prenda il posto di quello che nell'edificio sono le due diagonali, e che non includo per semplicità.

La modellazione fisica e matematica è un atto creativo che segue il progetto e che non necessariamente deve sere la foto del progetto. E' la libera interpretazione meccanica del progetto, funzionale agli obiettivi.

Se voglio considerare la condizione di carico forza  $F$  orizzontale, a questo punto conviene esplicitamente includere le diagonali, perchè servono per garantire l'equilibrio sotto un carico orizzontale.

Se lascio sotto una cerniera, la struttura sarà una volta **iperstatica**.

Posso farla diventare isostatica lasciando una sola diagonale, e mantenere cerniere interne.



### Vincoli in materiale elastomerico

Esempi di vincoli reali che traducono in materiale, pratiche costruttive in vincoli ideali visti fino ad ora.

Struttura in cemento armato precompresso

Passerella Garfagnana dell'ingegnere Riccardo Morandi

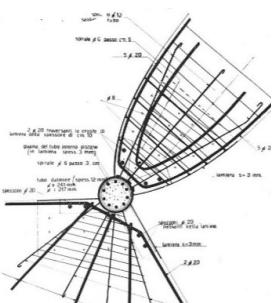
Arco conosce alle imposte e alla chiave di volta tre cerniere, ed è in calcestruzzo armato.

Vincolo ideale: pallino → cerniera interna

triangolino → cerniera esterna

Oggetto con materiale specifico che sia in grado di replicare esattamente le forze reagenti che quel vincolo reale attendiamo possa esprimere.

In questo caso nel dettaglio strutturale abbiamo l'unione tra struttura di fondazione, piede del semi-arco, e la cerniera (tubo d'almine riempito di calcestruzzo armato con barre d'armatura); fuori abbiamo fazzoletti in lamiera, unite a barre trasversali intorno alle quali passano barre longitudinali piegate per assicurare che l'elemento possa trasferire forze orizzontali e verticali ma che lasci libere in prima approssimazione la rotazione.



**Ogni materiale ha sua approssimazione più o meno brillante di vincoli ideali.**

Esercizio

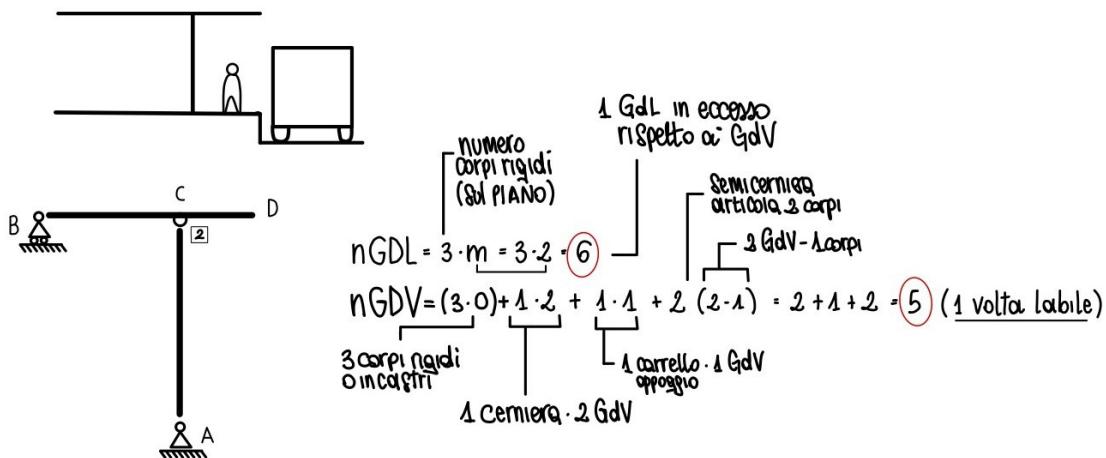
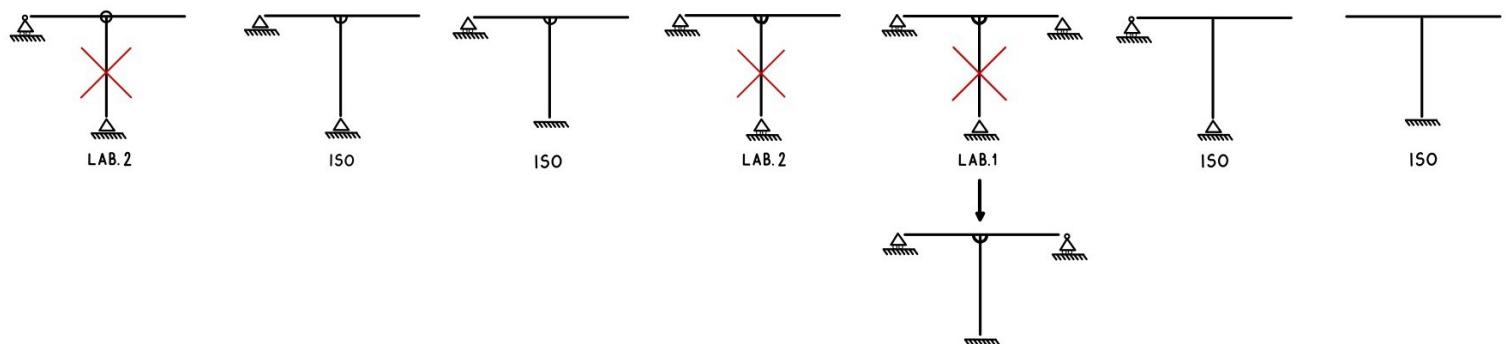
Sistema di due corpi rigidi (un ritto e un traverso)

Schema statico che vuole schematizzare la struttura di una pensilina

Modello matematico che definisce il nostro universo di interesse alla sola pensilina.

Gli eventuali altri elementi strutturali che compongono l'architettura li tradurremo con vincoli reali

Dato problema matematico dobbiamo ricercare uniticità della soluzione, un problema progettuale non ne prevede solo uno ma molteplici.

Trasformazione vincoli: esterni ed interni per rendere la struttura ISOSTATICA

Schema statico PENSILINA

Come determinare le forze reagenti espresse dai vincoli modulo e verso, in modo che il sistema complessivo sia in equilibrio

#### Determinare forze reagenti espresse dai vincoli

#### DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI DEI VICOLI ESTERNI DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA

della quale sia stato definito, quale sistema piano, lo schema statico e la condizione di carico

Procedimento solutorio:

1. Controllo della condizione di isostaticità della struttura. **Valutazione dei gradi di libertà e dei gradi di vincolo;** controllo della efficacia dei vincoli e della eventuale condizione di vincolo anomala.

Ogni corpo nel **piano** ha **3 GDL** (2 traslazione + 1 rotazione)

Ogni corpo nello **spazio** ha **6 GDL** (3 traslazione + 3 rotazione)

GDV: limitano la possibilità di movimento del corpo.

#### **Dobbiamo definire i vincoli, quindi la possibilità di ridurre i GDL**

2. Definizione di un **sistema di riferimento ortogonale**, con i relativi versi positivi per le forze ed i momenti.
3. Connotazione, con **lettere** (A, B...), delle **sezioni di vincolo della struttura** e di tutte le altre **sezioni singolari** (cerniere interne, sezioni di deviazione d'asse, sezioni di applicazione di forze o coppie ecc...).
4. Determinazione della risultante delle forze distribuite sulle parti della struttura che non contengono elementi di articolazione.
5. **Scomposizione di tutte le forze applicate** alla struttura secondo gli assi coordinati.
6. Eliminazione di tutti i vincoli esterni e loro sostituzione con le rispettive **reazioni vincolari** ( $H_A$ ,  $V_A$ ,  $M_A$ ;  $H_B$ ,  $V_B$ ,  $M_B$ ....).

Il numero delle reazioni incognite risulta pari al numero dei gradi di libertà della struttura svincolata, ( $GdL \geq 3$ ).

Un nuovo disegno rappresenta ora la struttura priva dei vincoli esterni e soggetta alle reazioni vincolari oltre che alle forze e coppie date. Il verso delle reazioni vincolari è scelto liberamente (più spesso concorde col sistema di riferimento).

#### **7. Scrittura delle equazioni di equilibrio**

Ad ogni grado di libertà della struttura svincolata corrisponde una equazione di equilibrio.

Si scrivono pertanto:

3 equazioni corrispondenti ai 3 gradi di libertà della struttura complessiva (equazioni generali)

$\sum H$  (sommatoria forze orizzontali) = 0 (spostamento secondo x)

$\sum V$  (sommatoria forze verticali) = 0 (spostamento secondo Y)

$\sum M$  (sommatoria dei momenti) = 0 (rotazione della struttura intorno ad punto qualsiasi del piano).

( $GdL - 3$ ) equazioni corrispondenti ai gradi di libertà delle articolazioni interne della struttura (equazioni ausiliarie).

Per le cerniere interne si ha:

$\sum M = 0$  (rotazione di una qualsiasi delle due parti della struttura confluenti sulla cerniera, intorno ad essa).

8. Risoluzione del sistema delle equazioni e determinazione delle reazioni incognite.

L'eventuale **segno negativo di una reazione vincolare** (forza o momento) indica che essa è di **verso opposto** a quello assunto all'atto della eliminazione dei vincoli.

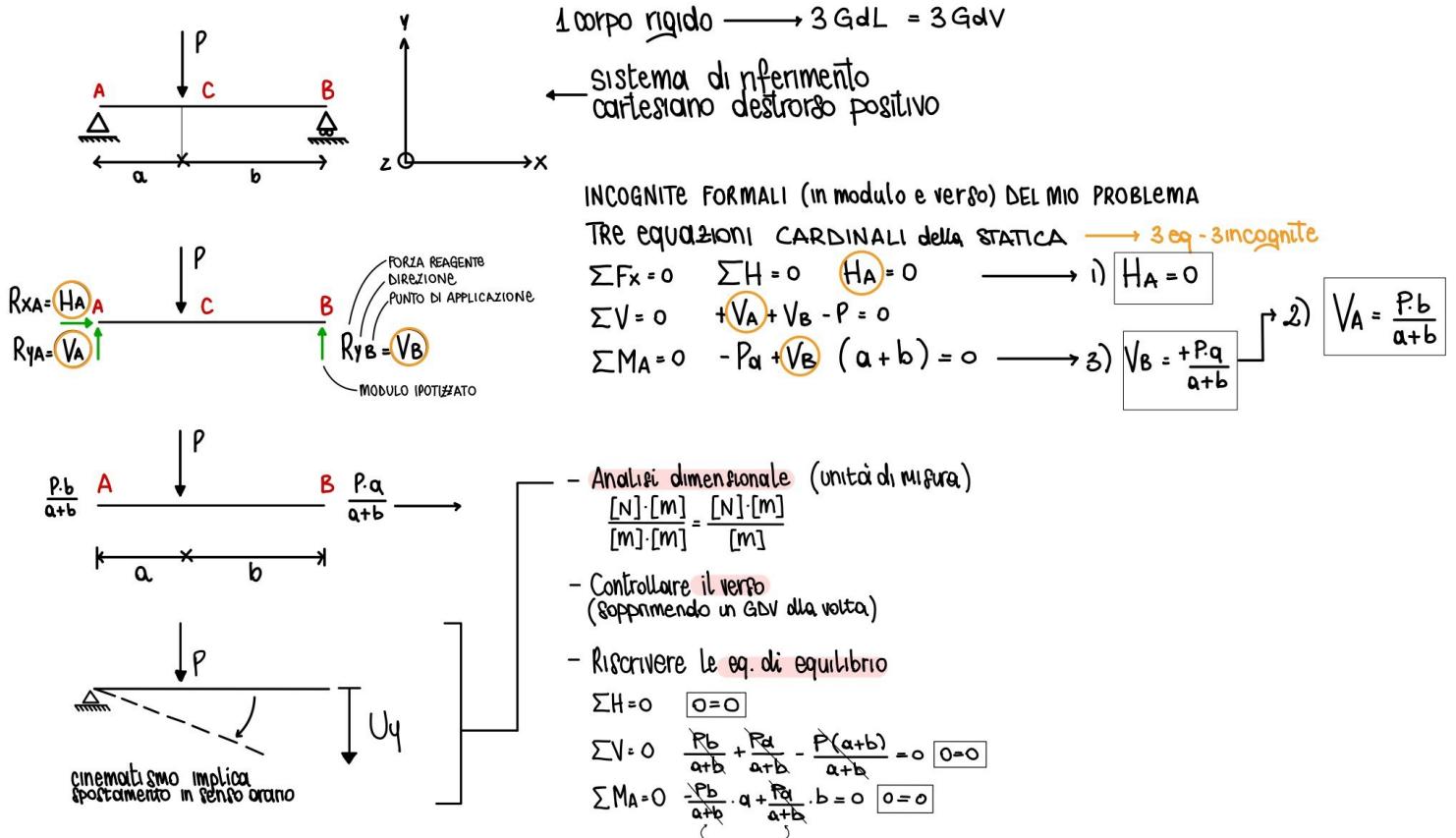
9. Un nuovo disegno rappresenta ora la struttura con le forze e le coppie date e con le reazioni vincolari indicate con il verso effettivo coerentemente al segno dei risultati.

Le forze sono possibilmente rappresentate in scala; i valori numerici delle forze e delle coppie sono riportati a fianco dei simboli che le rappresentano, tutti col segno positivo

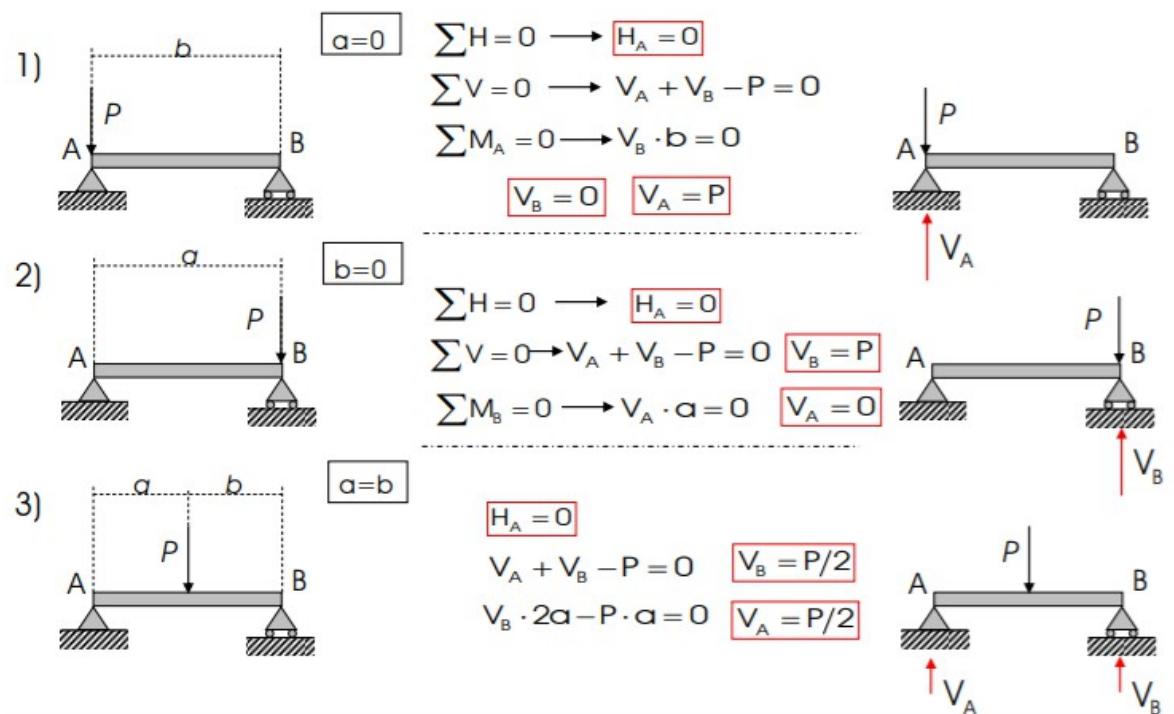
- Si cerca conferma, per quanto possibile, del **segno e del valore delle reazioni vincolari** (di quelle risultate nulle, in particolare) interpretando la funzione dei vincoli in rapporto alla condizione di carico data. Si cerca di riconoscere, ad esempio, quale spostamento produrrebbero i carichi se la struttura acquisisse un grado di libertà per la soppressione di un vincolo e si verifica se il verso della reazione di quel vincolo è tale da opporsi a quello spostamento.

L'impostazione dell'equilibrio e la determinazione delle sue condizioni

La progettazione ci permette di introdurre il killer dei gradi di libertà; ogni volta che ne eliminiamo uno, abbiamo un prodotto di scarto → reazioni vincolari (forza che genera altre forze, e che genera un momento, che aggiunto ad altri momenti, fanno sì che siamo in grado di imporre l'equilibrio). Come determinare le forze reagenti espresse dai vincoli modulo e verso, in modo che il sistema complessivo sia in equilibrio?

**Esercizio 1**

## Esempi di determinazione delle reazioni vincolari

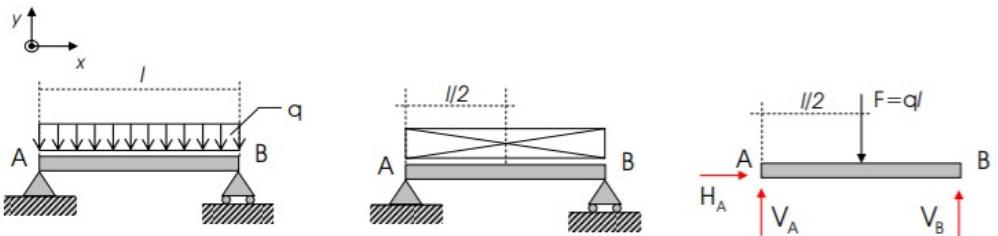


**Esercizio 2**

Sostituire al carico uniformemente distribuito la risultante, determinandone il baricentro.

Verso pari al verso del carico

Modulo pari al modulo del carico per la lunghezza lungo la quale il carico è distribuito, e dato che la retta dazione passa per il baricentro, dista una lunghezza pari ad  $L/2$  sia dal punto A che dal punto B

Risoluzione per via analitica

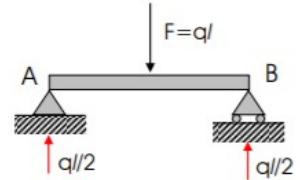
$$1) \sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$V_A = \frac{ql}{2}$$

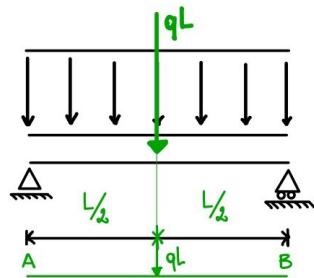
$$2) \sum V = 0 \rightarrow V_A + V_B - ql = 0$$

$$V_B = \frac{ql}{2}$$

$$3) \sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0$$

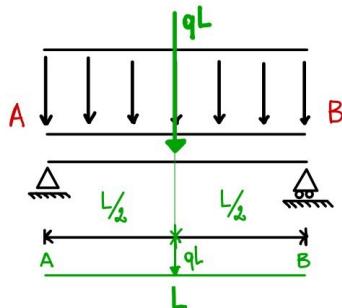


N.B. Se il problema è simmetrico, la soluzione è pure simmetrica.



CARICO UNIFORMEMENTE  
distribuito di modulo Q

Punto 4) decalogo  
sostituire al carico uniformemente distribuito  
la FORZA di CARICO



Eq. di equilibrio

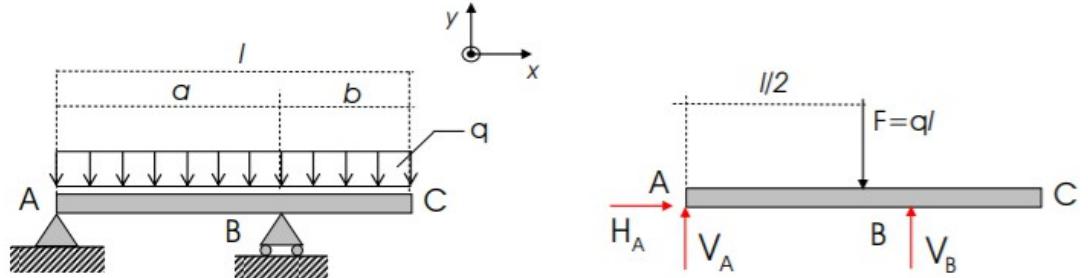
$$1) \sum H = 0 \longrightarrow H_A = 0$$

$$2) \sum V = 0 \longrightarrow V_A + V_B - qL = 0$$

$$3) \sum M_A = 0 \longrightarrow -qL \cdot \frac{L}{2} + V_B L = 0 \longrightarrow 3) V_B = \frac{qL^2}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{qL}{2}$$

Momento  $\frac{[N]}{[m]} \cdot [m] \cdot [m] = [N] \cdot [m]$

Esempi di determinazione delle reazioni vincolari



Risoluzione per via analitica

$$1) \sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

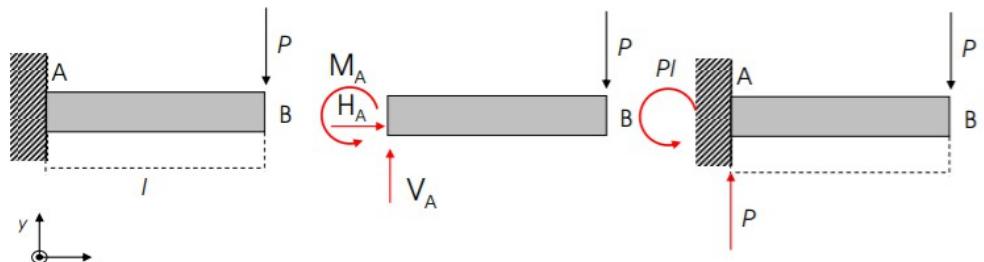
$$2) \sum V = 0 \rightarrow V_A + V_B - ql = 0$$

$$3) \sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot a - ql \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Considerazioni:

partendo dalle equazioni generali, senza conoscere i valori di  $a$  e  $b$ , non è possibile determinare a priori il verso delle reazioni vincolari  $V_A$  e  $V_B$ ; esso varia al variare della posizione dell'appoggio B, ovvero del parametro  $a$ . (vedi Esempi 3.2)

**Esercizio 3**



Risoluzione per via analitica

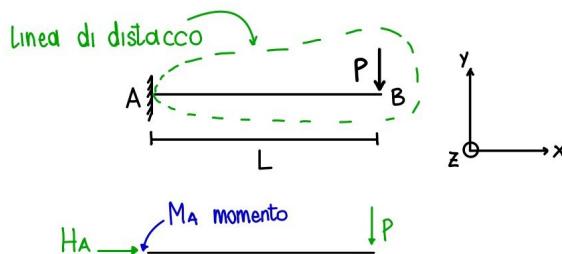
$$1) \sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$2) \sum V = 0 \rightarrow -P + V_A = 0$$

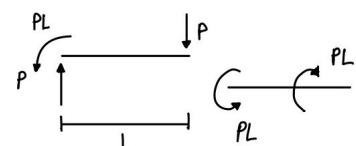
$$3) \sum M_A = 0 \rightarrow M_A - P \cdot l = 0$$

$$V_A = P$$

$$M_A = Pl$$



$$\begin{aligned} \sum H = 0 &\rightarrow H_A = 0 \\ \sum V = 0 &\rightarrow V_A - P = 0 \rightarrow V_A = P \\ \sum M_A = 0 &\rightarrow -PL + M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 &\rightarrow -VAL + M_A = 0 \\ &\rightarrow M_A = PL \end{aligned}$$



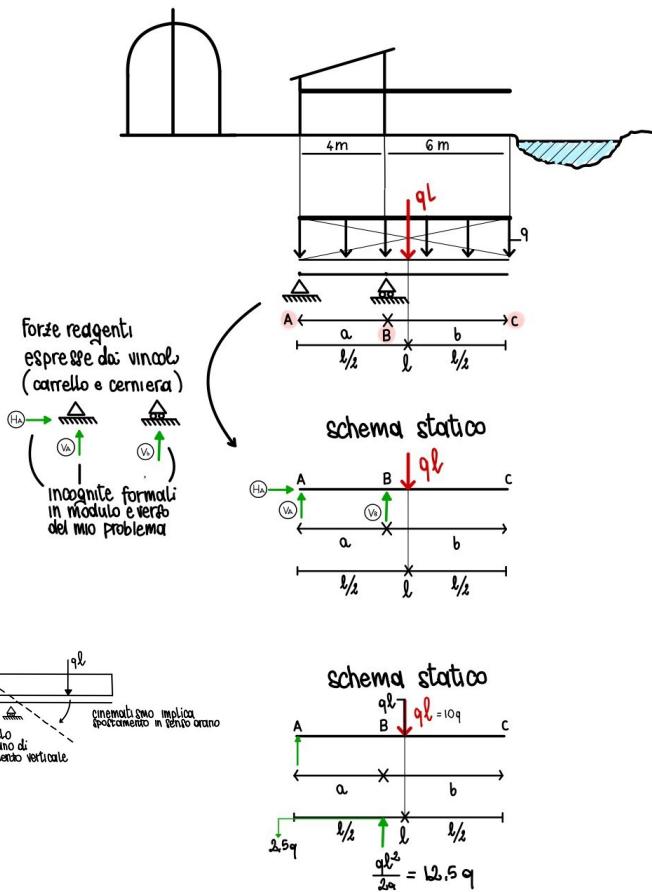
**Esercizio 4**

Edificio residenziale, a due piani, a manica singola che richiede una grande terrazza, con uno sbalzo di 6m per godere della vista sul tevere.

Minimizzare ingombro strutturale su filo facciata in maniera da godere della vista su S.Pietro.

Schema meccanico che riproduce in maniera approssimata il comportamento della struttura di piano Faccio riferimento ad un corpo rigido su semplice appoggio, con sbalzo, soggetto a carico uniformemente distribuito  $q$ , avente risultante  $qL$  agente su una retta d'azione che dista dagli estremi A e C di una lunghezza  $l$  metri.

Imposizione dell'equilibrio e la determinazione delle sue condizioni



- STRUTTURA ISOSTATICA**
- **1 corpo rigido  $\rightarrow 3$  GDL nel piano**
  - **Cerniera  $\rightarrow 2$  GDV**
  - **Carrello  $\rightarrow 1$  GDV**
  - **3 GDV**
  - **Sistema di riferimento cartesiano destrorso positivo per ottenere i versi a forze e momenti**
  - **Connotto punti particolari con lettere latine (A,B,C)**
  - **Sostituisco le reazioni vincolari con le forze reagenti espresse dai vincoli (carrello e cerniera)  $\rightarrow$  ipotizzo versi positivi, concordi con gli effetti**
  - **Equazioni di equilibrio (forze  $x,y$  - momenti  $z$ )**
    - 1)  $\sum H = 0 \quad H_A = 0 \quad \rightarrow H_A = 0$
    - 2)  $\sum V = 0 \quad V_A + V_B - qL = 0 \quad \rightarrow V_A = qL - \frac{qL^2}{2a}$
    - 3)  $\sum M_A = 0 \quad V_B \cdot a - qL \cdot \frac{l}{3} = 0 \quad \rightarrow V_B = \frac{qL^2}{2a}$

valutare polo attorno a cui porsi il maggior numero di rette d'azione delle forze incognite  $\rightarrow M_A$  e  $M_B$

$V_A = \frac{qL^2}{2a}$

$V_B = \frac{qL^2}{2a}$

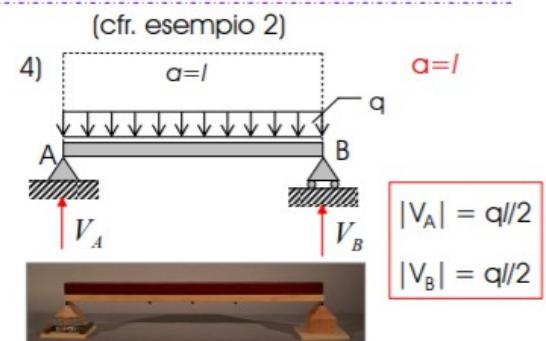
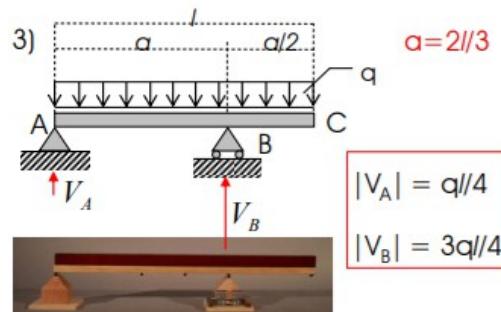
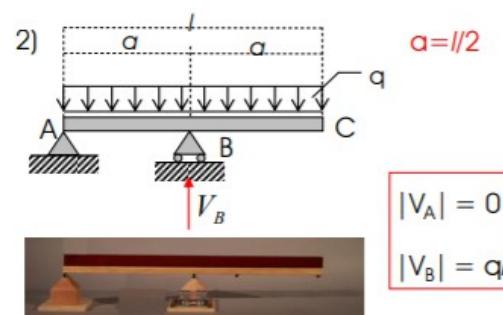
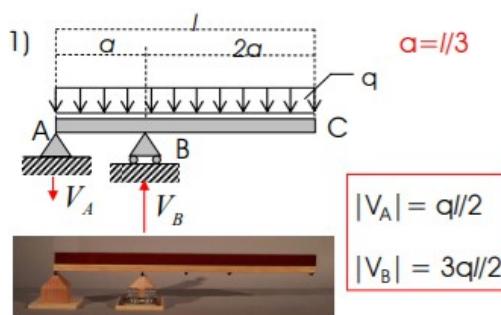
• **Ridisegno la figura con versi definiti (attribuendo valore numerico  $A \cdot B \cdot L$  oppure stabilendo rapporto tra A e B)**

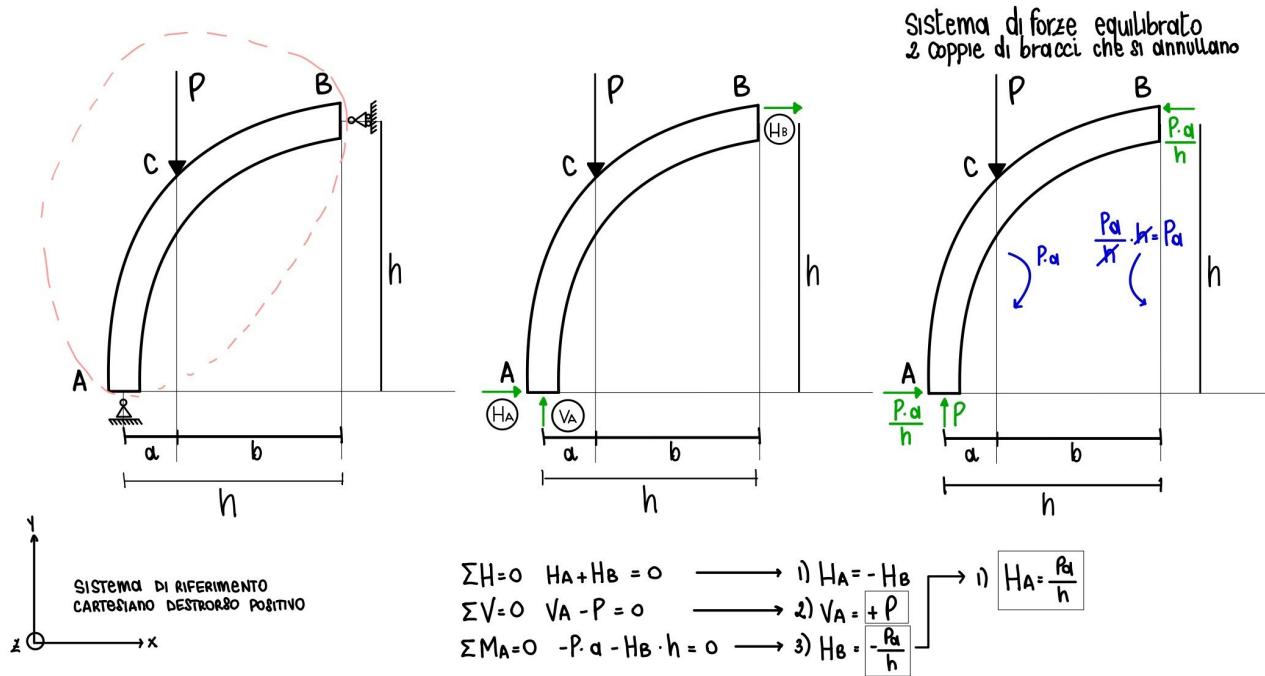
$a = 4\text{m}$   $b = 6\text{m} \rightarrow l = 10\text{m} \rightarrow V_B = q \cdot \frac{100}{8} = 12,5q$

$V_A = 10q - 12,5q = -2,5q$

$qL = 10q$

Esempi di determinazione delle reazioni vincolari



**Esercizio 5****Determinare le azioni vincolari di una struttura ad arco isostatica**

Cosa posso desumere dalla prima equazione?

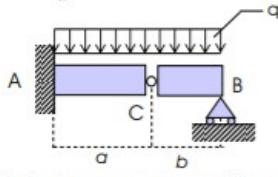
Non si può desumere che  $H_A$  e  $H_B$  siano = 0Sappiamo che hanno lo stesso modulo, ma con verso opposto  $\rightarrow H_A = -H_B$ **Esercizio 6**

Unico corpo rigido rettilineo ma inclinato di un angolo  $\alpha$  sulla direzione orizzontale, figurandoci che sia una scala appoggiata ad un muro e soggetto al peso proprio di una persona che sale lungo la scala, per cui abbiamo parametrizzato la distanza del peso applicato rispetto ad A (pari ad  $a$ ) e rispetto a B (pari a  $b$ ).

## DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI IN UN SISTEMA DI CORPI (n corpi rigidi con vincoli esterni ed interni)

### Esercizio 1

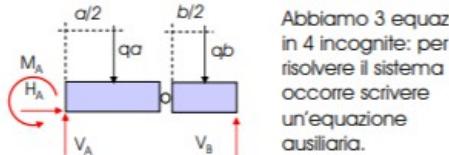
Sistema di due corpi rigidi vincolati esternamente dall'incastro in A e il carrello in B ed internamente fra di loro attraverso la cerniera in C.



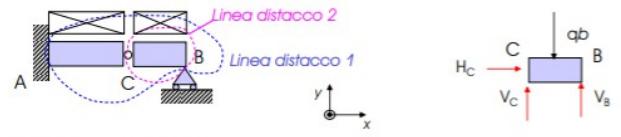
Risoluzione per via analitica

#### Linea di distacco 1

- 1)  $\sum H = 0 \rightarrow H_A = 0$
- 2)  $\sum V = 0 \rightarrow V_A + V_B - qa - qb = 0$
- 3)  $\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + V_B \cdot (a+b) - qa \cdot \frac{a}{2} - qb \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0$



Abbiamo 3 equazioni in 4 incognite: per risolvere il sistema occorre scrivere un'equazione ausiliaria.



#### Linea di distacco 2

Si scrive l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto C:

$$4) \sum M_C = 0 \rightarrow V_B \cdot b - qb \cdot \frac{b}{2} = 0 \quad \text{Equazione ausiliaria}$$

L'unica incognita presente nell'equazione è  $V_B$

N.B. Laver tracciato la linea di distacco in modo tale da racchiudere interamente una delle due parti di struttura separate dalla cerniera, ha avuto per conseguenza che l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera non ha introdotto ulteriori incognite.

Risolviamo ora il sistema di 4 equazioni in 4 incognite:

$$1) H_A = 0$$

$$2) V_A + V_B - qa - qb = 0$$

$$3) M_A + V_B \cdot (a+b) - qa \cdot \frac{a}{2} - qb \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$4) V_B \cdot b - qb \cdot \frac{b}{2} = 0$$

dalla eq. 4) troviamo:

$$V_B = \frac{qb}{2}$$

dalla eq. 2) si ricava:

$$V_A = \frac{qb}{2} + qa$$

dalla eq. 3) si ricava :

$$M_A = \frac{qa}{2} \cdot (a+b)$$

Geometria, vincoli, e azioni sono i tre elementi fondamentali dello schema statico. I punti A B e C sono i punti in cui o la geometria, o i vincoli o le azioni cambiano.

Ho il sistema di riferimento, la mia struttura, ho denominato i punti singolari con lettere latine.

C'è un carico uniformemente distribuito  $q$  che attraversa entrambi i corpi rigidi AC e CB.

Dopo aver determinato l'isostaticità della struttura attraverso i gradi di vincolo e i gradi di libertà, ridisegno la struttura con una linea di distacco che includa i corpi rigidi, e la separi dai vincoli esterni.

Quando un carico distribuito attraversa un vincolo interno è consigliato sostituirlo con le forze risultanti, ma considerando delle forze risultanti parziali, delle parti di carico distribuite su ogni singolo corpo rigido. Immaginando virtualmente che il carico distribuito sia interrotto in corrispondenza del vincolo interno. Non obbligatorio → consiglio per ridurre la complicazione dei carichi

Al posto dei pittogrammi dei vincoli sostituiamo le reazioni vincolari che quei vincoli impotenza esprimono. E dato che non ne conosciamo modulo e verso li ipotizziamo.

$(VB)$  ( $VA$ ) verticali ( $HA$ ) orizzontale

Momento reagente e  $MA$

Contiamo le incognite formali del nostro problema, ovvero le reazioni vincolari che non conosciamo in modulo e verso. Matematicamente questo problema in prospettiva di risolvere le tre equazioni della statica è detto **una volta indeterminato**.

Le tre equazioni cardinali della statica non sono matematicamente sufficienti per determinare 4 incognite. Dobbiamo includere ulteriori condizioni: occorre scrivere un **equazione ausiliaria**.

Quali condizioni di equilibrio mancano? **Equilibrio relativo tra i corpi**.

Dobbiamo ancora assicurarc che i due corpi non traslinno/ruotino fra di loro.

Tracciamo una seconda linea di distacco (include parti della struttura di cui vogliamo discutere l'equilibrio).

→ passa dai vincoli esterni e da quello interno (due alternative AC o CB)

Consideriamo corpo CB (per evitare di calcolare più forze)

Al posto della cerniera in C segnerò le reazioni vincolari interne che quel vincolo potenzialmente può esprimere (non le conosco, ma ipotizzo modulo e verso di  $V_C$  e  $H_C$ ).

Utilizzare come polo C, perché passano le reazioni vincolari delle due nuove incognite ( $V_C$  e  $H_C$ )

Commenti:

- 6 incognite → 6 equazioni (3 statica e 3 equilibrio)
- In virtù della scelta del polo in cui discutere l'equilibrio dei momenti relativi, vediamo che l'**eq 6** è una nuova equazione in cui ci sono solo incognite "vecchie" → **Equazione ausiliaria della statica**

Se fossimo interessati a tutte le reazioni vincolari (interne ed esterne), tutte le equazioni sarebbero utili; se fossimo interessati unicamente alle reazioni esterne, l'equazione 4) e 5) non sarebbero più utili.

### Riassunto procedimento

Traccio la linea di distacco che passa per l'interno, e per un vincolo esterno (solo per vincoli, non può tagliare il corpo rigido).

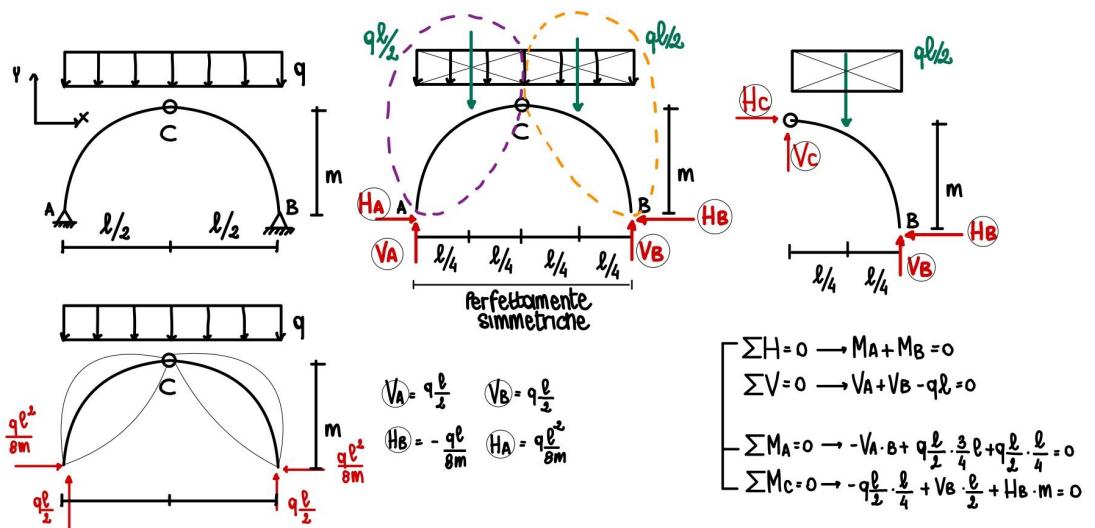
Ridisegno la parte di struttura.

Se sono interessati alle reazioni esterne scrivo solo l'equazione ausiliaria, e perchè sia tale è l'equazione di equilibrio dei momenti, valutati nel vincolo interno. Possibilmente ponendo come polo, quello che coincide con il vincolo interno, perchè elimina le nuove incognite.

### Esercizio 2

#### Arco a tre cerniere

Arco con carico uniformemente distribuito applicato sull'orizzontamento



Denominazione dei punti singolari con lettere latine

Due corpi rigidi articolati con cerniera interna con chiave di volta: 6 GDL e 6 GDV (struttura isostatica)  
Sistema di riferimento globale

Ridisegno la parte di struttura compresa nella prima linea di distacco (separa l'insieme dei corpi rigidi dall'esterno, quindi dai pittogrammi dei vincoli esterni).

Divido carico  $q$  nelle due parti applicate sui due corpi rigidi

Imposto reazioni vincolari e quote

4 reazioni vincolari incognite ( $V_A, H_A - V_B, H_B$ ) → abbiamo bisogno di un'equazione ausiliaria che possiamo procurarci perchè c'è una cerniera interna da cui possiamo far passare una linea di distacco.  
Poichè la figura è perfettamente simmetrica per geometria, condizioni di vincolo e condizioni di carico, sarà indifferente considerare CB o AC.

Consideriamo semiarco CB (linea di distacco arancione), ridisegno la struttura ipotizzando  $V_C$  ed  $H_C$  (in totale ora abbiamo 6 incognite → 6 equazioni: 3 ne discutono l'equilibrio assoluto, 3 quello relativo)  
Tre equazioni di equilibrio + equazione ausiliaria (utile quando valuta equilibrio dei momenti nella cerniera interna perchè annulla i momenti).

Valutazione equilibrio momenti intorno ad A e C

Verifica dimensionale e del verso

Osservazioni conclusive:

Le reazioni vincolari orizzontali confermano che l'arco è una figura spingente.

Inoltre la forza orizzontale non dipende dalla forma dell'arco, poichè monta e luce rimarrebbero le stesse.  
(nessun raggio di curvatura influenza l'andamento della forza)

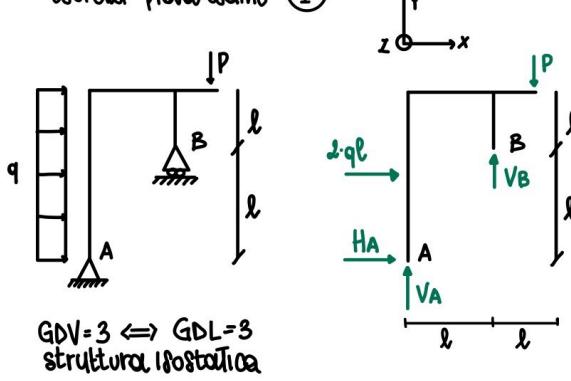
Tutte le monte dell'arco hanno in comune di avere una monta (m) e una luce (l) unici due parametri rilevanti alla determinazione delle reazioni vincolari orizzontali.

La spinta dell'arco dipende unicamente dal rapporto luce-monta.

La spinta diminuisce all'aumentare della monta, al denominatore (inversamente proporzionali) → andamento iperbolico

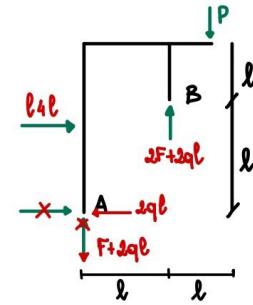
(Architettura gotica, Cattedrale di Chartres)

## esercizi prova esame ①

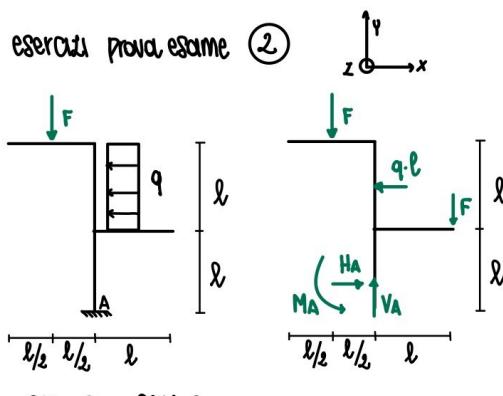


$$\begin{aligned}\sum H &= 0 & H_A + 2ql &= 0 \\ \sum V &= 0 & V_A + V_B - F &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & -F \cdot l + V_B \cdot l - 2ql \cdot l &= 0\end{aligned}$$

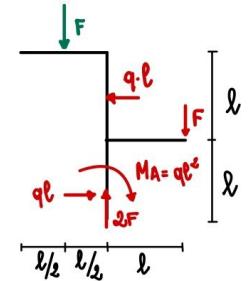
$$\begin{aligned}H_A &= -2ql \\ V_B &= 2F + 2ql \\ V_A &= lF + F - 2ql = -F - 2ql\end{aligned}$$



## esercizi prova esame ②



$$\begin{aligned}\sum H &= 0 & H_A - ql &= 0 \\ \sum V &= 0 & -2F + V_A &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & MA - F \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \frac{l}{2} + ql \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{2} &= 0 \\ MA - \frac{3}{2} ql^2 &= 0 \\ MA &= \frac{3}{2} ql^2 \\ MA &= \frac{ql^2}{2} - \frac{3}{4} ql^2 = \frac{4+3}{2} ql^2 = -ql^2\end{aligned}$$



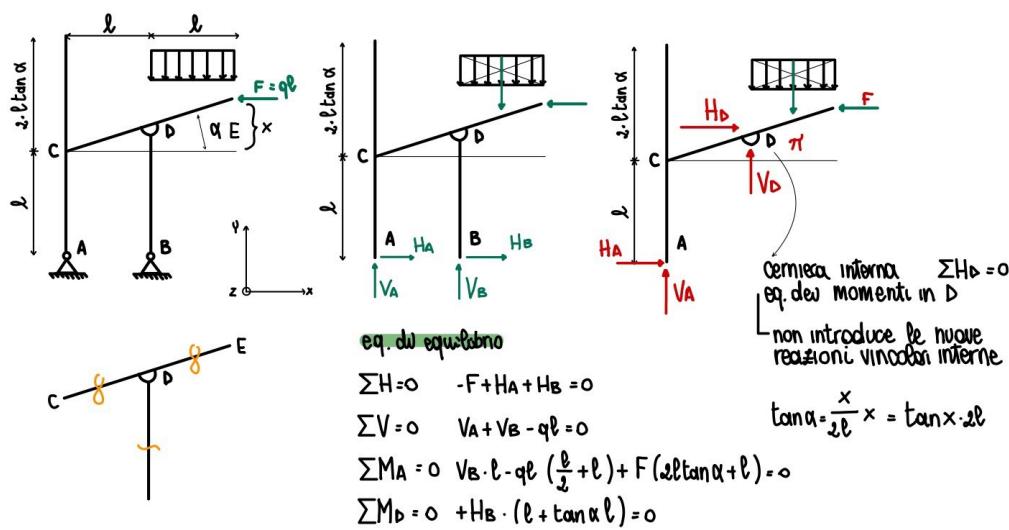
## Esercizio 2.2

Quanti corpi rigidi riconosciamo in questa struttura?  
E' unico o separato?

La struttura è isostatica? Qual è il cinematico che immaginiamo?

Guardiamo alla geometria: ci sono tutti i dati per valutare eventualmente dei bracci e definire la geometria?

## es II.2



## Eq. AUXILIARIA di equilibrio

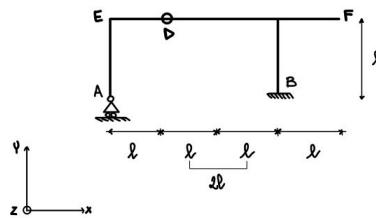
$$\begin{aligned}H_B &= 0 & V_B \cdot l - \frac{ql^2}{2} + ql^2 + Fl &= 0 \\ F &= H_A & V_B \cdot l = \frac{8ql^3}{2} + Fl + 2Fl \tan \alpha - ql \\ V_A &= \frac{3ql - 2F - 4Fl \tan \alpha - ql}{2} = 0 \\ V_A &= ql \cdot \frac{3ql + 2F + 4Fl \tan \alpha}{2} = -\frac{ql}{2} + \frac{ql}{2} + F = 2Fl \tan \alpha \\ V_B &= \frac{3}{2} ql - F - 2Fl \tan \alpha \quad \text{posto } F = ql\end{aligned}$$

$$V_B = \frac{ql}{2} - ql \tan \alpha, \quad V_A = \frac{ql}{2} + ql \tan \alpha$$

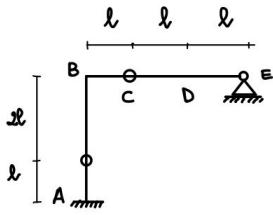
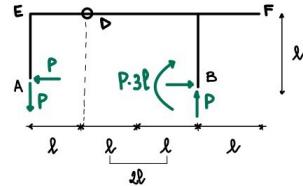
QA segno positivo → verso confermato

VB segno negativo → riferito a f = ql

## Sistemi di corpi rigidamente articolati



$$\begin{aligned}\sum H &= 0 \rightarrow H_B - P = 0 \rightarrow H_B = P \\ \sum V &= 0 \rightarrow V_A + V_B = 0 \rightarrow V_B = -V_A = P \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow M_B + V_B \cdot (4l + l) = 0 \\ &\Downarrow \\ M_B &= -V_B \cdot 3l = -P \cdot 3l\end{aligned}$$

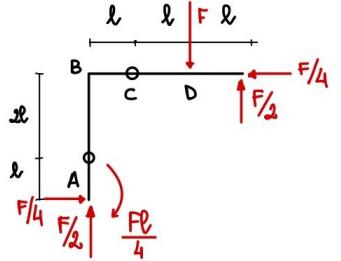
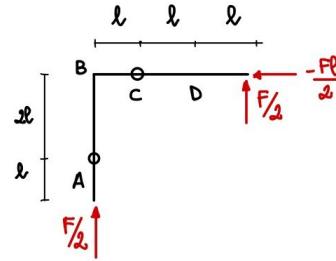
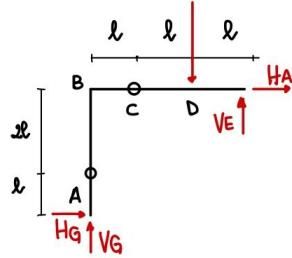
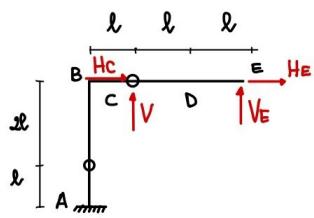


3 corpi rigidi  
2 articolazioni esterne  
eq. AUXILIARIE NECESSARIE + 3 eq. CARDINALI  
Reduzioni vincolari esterne  $\rightarrow$  5 incognite  
2 condizioni esterne  
3 momento M\_A per l'incastrato

eq. di equilibrio

- 1  $\sum H = 0 \quad H_A + H_E = 0$
- 2  $\sum V = 0 \quad V_A + V_E - F = 0$
- 3  $\sum M_A = 0 \quad M_A - F(2l) + V_E(3l) - H_E = 0$

*Sistema di riferimento globale*



eq. AUXILIARIE

- 1  $\sum H = 0 \quad H_C + H_F = 0$
  - 2  $\sum V = 0 \quad V_C + V_E - F = 0$
  - 3  $\sum M_C = 0 \quad V_E(2l) - F(l) = 0$
  - 4a  $\sum M_G = 0 \quad V_E(3l) - H_E(2l) - F(2l) = 0$
  - 5b  $\sum M_G = 0 \quad M_A + H_A \cdot l = 0$
- $$\text{②} \longrightarrow \text{③} \quad V_C = -\frac{F}{2} + F = \frac{F + Fl}{2}$$
- $$\text{④} \longrightarrow \text{③} \quad V_E = \frac{F}{2}$$

$$\begin{array}{c} H_E \\ \text{---} \\ V_E \end{array} \quad \text{③} \quad \begin{aligned} M_A + F/2 \cdot 3l - (-F/4) \cdot 3l - 2Fl &= 0 \\ M_A + 3/2 \cdot Fl + 3/4 Fl - 8/4 Fl &= 0 \\ M_A + 6/4 Fl + 3/4 Fl - 8/4 Fl &= 0 \\ M_A &= -1/4 Fl \end{aligned}$$

Obiettivo posto: determinare stato meccanico dell'elemento strutturale trave, in tutte le sue parti (flusso delle forze interne che fluiscono all'interno del canale serbatoio).

### La trave

Definizione: con il termine di "trave" (o **solido di De Saint-Venant**, 1855) si indica un corpo solido nello spazio tridimensionale/elemento strutturale in cui **una dimensione risulta prevalente sulle altre due** (è molto maggiore delle altre due, di almeno un ordine di grandezza superiore).  
Es. le matite sono delle travi (occupa porzione di spazio, la sua lunghezza 15cm è molto maggiore delle altre due dimensioni, diametro 7mm). Rapporto tra lunghezza e altre dimensioni circa 20.

Altre condizioni:

La trave è definita come un solido generato da (roto-translazione) una figura piana  $\Omega$  (**generatrice**), tratteggiata in bianco e nero, che si sposta mantenendosi perpendicolare alla traiettoria del suo baricentro G (**direttrice**), tratteggiata in rosso; e in ogni punto di quest'ultima, la generatrice rimane perpendicolare alla medesima.

Perchè deve essere perpendicolare? Se il piano varia la sua giacitura, il solido non sarà più generato per semplice traslazione, ma risulterà in un volume con strizzioni e allargamenti.

Non per forza la direttrice deve essere un segmento retto.

La generatrice:

- può variare gradatamente;
- deve mantenere dimensioni piccole: - rispetto al raggio di curvatura  $r$  della direttrice;
- rispetto allo sviluppo  $l$  della direttrice.

### Dall'elemento tridimensionale a quello monodimensionale

Una trave è caratterizzata da:

- la sua linea d'asse, coincidente con la direttrice;
- le sezioni  $S_i$ , coincidenti con le posizioni successive della figura generatrice.

Condizione per cui una dimensione è prevalente:

Dimensioni caratteristiche della generatrice (rettangolo, la cui maggiore dimensione è il lato  $a$ , deve essere sempre molto più piccola di  $l$ , lunghezza rettilinea/curvilinea della direttrice, minore del raggio di curvatura della direttrice).

Se la direttrice è **retta** il suo raggio di curvatura è **infinito**.

Se il raggio di curvatura è finito dobbiamo preoccuparci che a sia molto più piccolo di  $r$ .

Possiamo approssimare la generatrice a quei solidi che hanno una direttrice che varia gradualmente  
Il rapporto incrementale di  $a$  su  $z$  è molto minore di 1

Se passo da  $z_1$  a  $z_2$ ,  $a$  varia da  $a_1$  a  $a_2$

Variazione di  $z$  molto più grande della variazione di  $a$   $da/dz \ll 1$

### Vantaggi nel definire questo particolare solido

#### Primo vantaggio

Il primo attiene alla rappresentazione di questo elemento strutturale

Possiamo dare al solido di De Saint-Venant una rappresentazione tridimensionale

In virtù del fatto che sia una successione di generatrice lungo la direttrice, posso dare una **rappresentazione unifilare** (line like).

Posso affermare che una **trave è semplicemente la sua direttrice** (segmento rosso).

Se il volume tridimensionale l'ho fatto diventare varietà unidimensionale, ogni **direttrice** in questa opera tridimensionale diventa **zero dimensionale**.

Ognuno degli infiniti punti che stanno sul segmento rosso qualifica una generatrice (traccia su piano sezione perpendicolare alla direttrice) li chiameremo **sezioni della trave** ( $S$ ).

Geometricamente nella rappresentazione unidimensionale, la sezione è unicamente definita dalla sua posizione nello spazio.

Tutte le sezioni da  $S_1$  ad  $S_n$  hanno la sezione quadrata

Associamo a quei punti una caratteristica ulteriore alla loro posizione (geometria della sezione), ma al di fuori della rappresentazione geometrica che le stiamo dando.

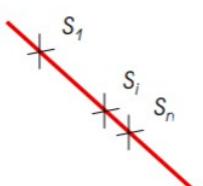
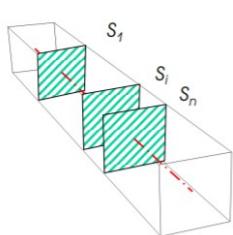
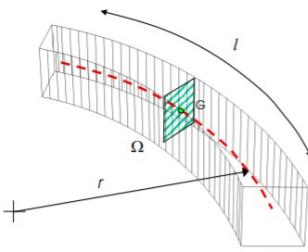
Elemento strutturale che non è un solido di De Saint-Venant: setto murario, volta, cupola

Se riduciamo il setto murario ad una serie di maschi murari, potrebbe essere considerato una trave

#### Secondo vantaggio

### Dalla struttura reale al modello trave

La teoria della trave permette di risolvere in maniera semplificata problemi reali complessi; l'errore commesso con la semplificazione è tanto maggiore quanto più il problema si discosta dalle ipotesi del modello.



Elementi strutturali assimilabili ad una trave

1. **Pilastro in calcestruzzo armato prefabbricato** di un capannone industriale, in particolare fusto (parte inferiore) e baionetta (parte superiore).

Due ringrossi localizzati che servono per supportare travi longitudinali (mensole tozze) non sono una trave. In prima approssimazione tutto il pilastro può essere visto come solido di De Saint-Venant.

2. Variazione localizzata di sezione dovuta al **copri giunto in una unione bullonata**.

3. Copertura **terminal aeroportuale Stoccarda**, 1990 (ispirata ad alberi)

Pilastri ad albero, nel loro insieme non sono considerati travi, ma singolarmente sì.

Non può essere considerato trave il nodo (non risponde ai requisiti di De Saint-Venant)

4. **Trave in acciaio** del palazzetto dello sport – Torino

Trave ad altezza variabile (copertura capannone industriale) aumenta l'altezza in modo graduale.

Condizione di gradualità per la legge di variazione delle sezioni.

Ci sono punti angolosi (rossi), il raggio di curvatura della direttrice è nullo.

Complessivamente possiamo considerarli in prima approssimazione delle travi, ma localmente qualcun'altro si occuperà dei dettagli.

5. Sezioni non ortogonali alla **linea d'asse**.

6. **Aula magna** Facoltà di Economia e Commercio – Torino

Dimensione longitudinale confrontabile con una dimensione della sezione.

altezza sezione trasversale travi proporzionale alla loro luce.

Strutture di piano correnti con travi (luce ordine di grandezza maggiore dell'altezza della trave) è sempre vero tranne per la particolare trave tratteggiata in rosso (altezza di 3m, contro una luce dell'ordine dei 12m) - non può essere considerata una trave (chiamata trave parete, si confonde con un elemento che ha due dimensioni preponderanti sulla terza, come un setto murario).

Nella maggioranza dei casi l'architetto può fare ricorso al concetto di trave per sviluppare modello matematico in grado di aiutarlo nella concezione strutturale preliminare dell'intero organismo strutturale.

#### L'equilibrio di un tratto di trave

Se una trave soggetta a carichi applicati (concentrati o distribuiti, agenti o reagenti) è in equilibrio, perché lo sia pure qualsiasi suo tratto (compreso in una ideale linea di distacco ld passante per la generica sezione Si ) nella sezione devono essere applicati una **forza e un momento risultanti** delle forze applicate nel restante tratto.

Forze applicate su corpo rigido, specificato come trave, rappresentato con una linea e punti (sezioni) Sul corpo rigido agiscono delle forze, alcune sono forze agenti e altre reagenti. (Tutte forze applicate all'esterno della trave).

Obiettivo: **determinare le forze interne in corrispondenza della sezione generica i-esima**

Si può considerare una linea di distacco ld, che passa per la sezione di nostro interesse (laddove voglio determinare forze interne). → tagliare idealmente il corpo in corrispondenza della sezione di interesse.

Posso usare condizione di equilibrio per affermare che dentro la sezione iesima dovranno agire delle forze che suppliscono idealmente alle forze blu che non stiamo considerando per garantire l'equilibrio/ oppure che sono delle forze la cui risultante e momento risultante sommato alle forze verdi garantiscono l'equilibrio. Nella sezione dovranno per forza essere applicate forza R e momento M che garantiscono equilibrio delle forze verdi, che equivalgono alle forze blu che non ho più considerato.

**Le forze blu hanno il compito di equilibrare le forze verdi che sto considerando.**

R ed M devono compensare il lavoro di F5, F6, F7

R non può che agire nel baricentro della generatrice.

Il punto di applicazione di R in un corpo che non è una trave/solido di De Saint-Venant non possiamo individuarlo, perché non può essere ridotto ad una linea (unifilarmente).

Utile scomporre R ed M nelle componenti rispetto ad un sistema di riferimento

Scomporre R ed M rispetto a sistema di riferimento agganciato all'inclinazione della sezione nello spazio. Ha due assi che definiscono piano generatrice e terzo asse perpendicolare che coincide con la direttrice, secondo asse del solido.

Comunque sia orientata la trave nello spazio, potrò sempre valutare forze interne mettendomi in questo sistema dei riferimenti che si orienta come è orientato l'elemento strutturale del solido.

Obiettivo: **definire sistema di riferimento per valutare componenti della forza interna R e momento interno M** che sia di più facile comprensione rispetto al sistema di riferimento generale universale cartesiano ortogonale finora utilizzato.

Chiamiamo le componenti di R e di M valutate rispetto a questo particolare **sistema di riferimento locale**, caratteristiche di sollecitazione (*internal forces*) perché descrivono in maniera semplice e immediata lo stato della sollecitazione della trave in quel punto, la richiesta meccanica che il sistema induce nella trave, in quella particolare sezione.

### Caratteristiche di sollecitazione

Sono dette Caratteristiche di Sollecitazione (CdS) le componenti di R e di M in un particolare sistema di riferimento cartesiano ortogonale x e y detto “**locale**” perché riferito al piano della sezione.

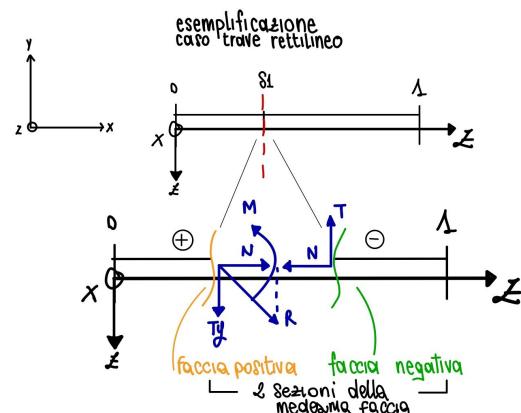
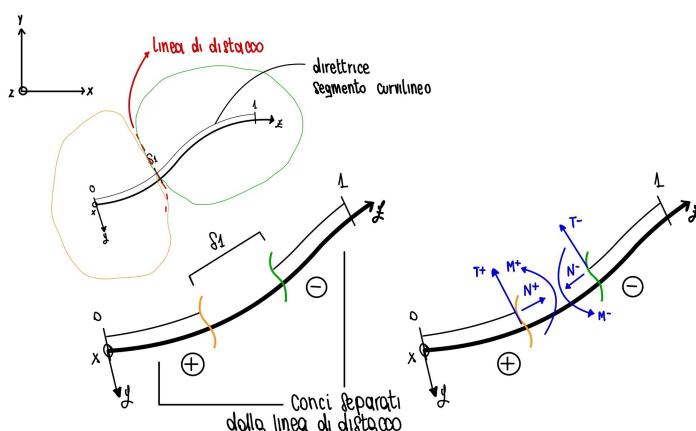
Per indicare sistema di riferimento locale dobbiamo fare riferimento ad una trave e ad una sua eventuale giacitura.

Trave che ha linea direttrice rettilinea orientata secondo asse X (trave orizzontale)

Come definiamo sistema di riferimento locale?

In virtù della definizione del solido di De Saint-Venant se uno degli assi segue la direzione della direttrice avrà un asse perpendicolare al piano e il secondo completa una terna destrorsa positiva.

Per convenzione, l'asse che coincide con la direttrice viene chiamato z, l'asse perpendicolare al piano viene chiamato x, e l'asse che completa la terna destrorsa positiva viene chiamato y.



Procedimento:

Imposto una direttrice

Fisso il punto in cui avviene la sezione S1

Determino punto iniziale (0) e punto finale (1)

Definisco gli assi z, x, y in base al sistema di riferimento universale cartesiano destrorso

Facciamo passare una linea di distacco per la sezione (S1) di nostro interesse

La faccia che chiamiamo **positiva** è quella che viene bucata da asse z per **uscire dalla trave**

La faccia che chiamiamo **negativa** è quella che viene bucata dall'asse z per **entrare dalla trave**

Su faccia **positiva** i versi sono **positivi** quando **concordi** con gli assi

Su faccia **negativa** i versi sono **negativi** quando **discordi** con gli assi

Verso N positivo perché concorde con z su faccia positiva

Verso T positivo perché concorde con y su faccia positiva

Verso N (dalla faccia negativa) è positivo perché concorde con z su faccia negativa  
Verso T (dalla faccia negativa) è positivo perché concorde con z su faccia negativa

Si chiama **N**: componente che sta per **sforzo normale** (ortogonale alla faccia) - in inglese *axial force* (A)  
Si chiama **T**: componente che sta per **sforzo tagliante** - in inglese *shear force* (T)

Convenzione di segno per M sapendo che il momento risultante ha una sola componente, perpendicolare all'asse x piccolo → sempre regola mano destra

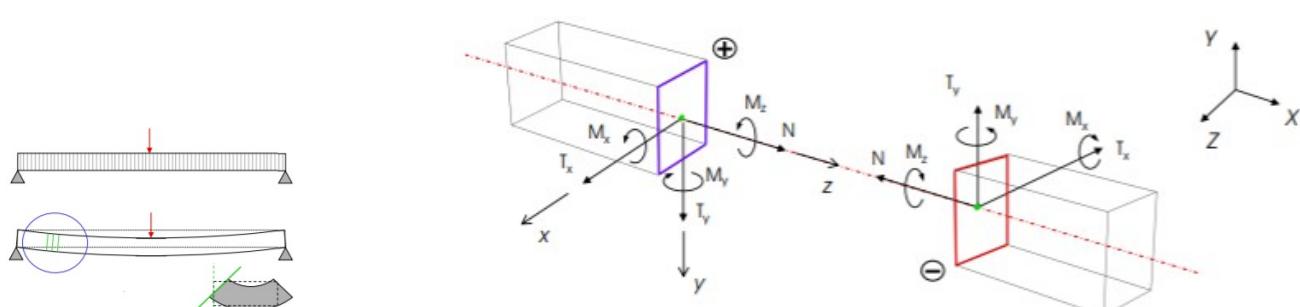
Su faccia positiva M è positivo, equiverso ad x

Su faccia negativa M è negativo perché di verso opposto ad x

M chiamato anche momento flettente

Ma momento torcente

La trave permette di definire le forze interne perché ne conosciamo a priori il punto di applicazione e perché a queste forze assegnamo nomi che dipendono dall'orientamento della faccia.



La configurazione deformata della traveTerzo vantaggio

Queste 3 caratteristiche di sollecitazione (3 nel piano e 3 spazio) hanno la suscettibilità di essere interpretate grazie alla dualità statico-cinematica.

**Statico:** forze

**Cinematico:** effetto che le forze esterne hanno sul corpo (gli spostamenti, tradotti in gradi di libertà)

Per valutare l'effetto delle forze interne (caratteristiche forze sollecitazione) dobbiamo rimuovere ipotesi di corpo rigido, ma figurarsi trave come corpo deformabile, che per effetto delle caratteristiche di sollecitazione interne perda la sua forma.

Possiamo stabilire il rapporto tra caratteristiche sollecitazione e la forma che assume il corpo sotto le medesime.

La trave, **corpo elasticamente deformabile**, si deforma sotto l'**effetto dei carichi** e la configurazione deformata di un suo concio può essere desunta dalla sola conoscenza delle **caratteristiche di sollecitazione**, sotto l'ipotesi che le sezioni (generatrice) possano ruotare o traslare, ma rimangano piane e senza perdere la loro forma.

Ipotesi: pur perdendo la sua forma, il solido la perde solo nei termini di forma della direttrice, chi non cambia la sua forma è la generatrice.

Soggetto a carichi (forze rosse), per effetto delle forze reagenti e agenti nasceranno caratteristiche di sollecitazione che faranno cambiare la forma solo della **linea direttrice**, mentre le generatrici continueranno ad avere la stessa forma di prima (**generatrice piana**, non esce dal suo piano, non perde rapporto dimensioni, continua d'essere perpendicolare alla direttrice).

Se la direttrice cambia forma e localmente ruota, le generatrici possono ruotare per andare dietro alla direzione della direttrice, possono traslare lungo lasse, ma non possono perdere la loro forma e debbono rimanere figure geometriche piane.

La direttrice si è inflessa, ma viceversa il rigato trasversale (le generatrici) è dietro la direttrice, quindi può ruotare, ma continua a rimanere un segmento retto.

Relazioni tra sollecitazioni e deformazioni

Trovare relazione tra la causa caratteristica della sollecitazione e l'effetto del cambiamento della forma

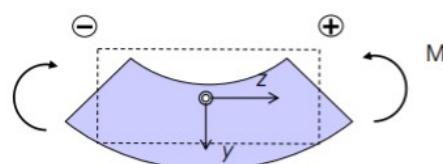
Applico ad entrambe le sezioni una forza → a parte centrale si inflette

**Momento flettente M: deformazione flessionale** (determinante nel tracciamento della configurazione deformata della trave)

Ha come effetto quello di incurvare la direttrice

**Caratteristica di sollecitazione** che ha l'effetto deformativo maggiore e che vediamo ad occhio nudo

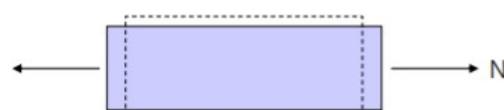
Indurre rotazione delle sezioni (ruolo Mflettente)



**Sforzo normale N: deformazione assiale** (determinante solo quando M=0)

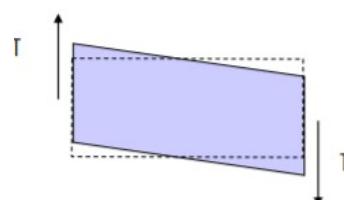
Ha come unico effetto la variazione in lunghezza della direttrice (allungamento o accorciamento)

L'effetto sul campo di deformazione del momento flettente lo vedo ad occhio nudo, quello dello sforzo normale è di ordine di grandezza minore



**Sforzo di taglio T: deformazione dovuta a taglio** (generalmente trascurabile per la trave)

Due forze orientate verso opposto (questa componente di deformazione è ancora più piccola delle precedenti) la componente di deformazione a taglio è quasi sempre trascurabile nelle travi, ameno che la trave sia soggetta solo a taglio.



Questa relazione tra le componenti della forza interna e gli effetti deformativi ci permettono di dare un senso fisico alle caratteristiche di sollecitazione.

Ognuno di M, T, N ha un solo effetto sulla deformazione dell'elemento strutturale.

Morfologia 09/11

Le **caratteristiche di sollecitazione** sono forze che garantiscono l'equilibrio a fronte di carichi applicati agenti o reagenti, e lo garantiscono per ogni sezione della trave.

Se cambio la sezione di interesse e quindi la linea di distacco, posso includere nuove forze all'interno della linea di distacco, e variando le forze agenti o reagenti, varieranno anche le caratteristiche di sollecitazione affinché facciano equilibrio.

Queste caratteristiche di sollecitazione sono intimamente connesse con lo stato deformato della trave considerato non più come corpo rigido ma **deformabile**.

Come determinare modulo (intensità) e verso delle caratteristiche di sollecitazione in ogni sezione della trave Il **punto di applicazione** delle caratteristiche di sollecitazione è noto a priori: punto sulla direttrice della trave che denota sezione di interesse.

Sono anche note a priori le **direzioni**, corrispondenti agli assi del sistema di riferimento locale.

Le caratteristiche di sollecitazione sono quelle che assicurano con modulo e verso, l'**equilibrio del tratto di trave compreso tra la sezione di interesse e il vincolo interno ed esterno** di cui siano già note le reazioni vincolari.

Le condizioni matematiche che impongono l'equilibrio sono le medesime che applicavamo ad ogni singolo corpo rigido: le **equazioni di equilibrio**

La differenza è che invece che applicarle ad ogni singolo corpo rigido, le applicheremo ad ogni singola parte di corpo rigido che passa per la linea di distacco della sezione di nostro interesse.

All'architetto interessa che l'**equilibrio sia soddisfatto in tutte le sezioni della trave**, perché l'equilibrio implica che il tratto di trave sia sempre in equilibrio.

**In un segmento infinito ci sono infiniti punti/sezioni possibili** (che dovranno essere in equilibrio)

Le caratteristiche di sollecitazione non saranno solo **incognite in un punto** ma le possiamo esprimere come **variabili dipendenti (funzioni)** che varieranno al variare della posizione della sezione.

Sarà quindi necessario trasformare le tre equazioni di equilibrio in **tre funzioni**

Nella normale funzione → y variabile dipendente che dipende da variabile indipendente (x)

In questo caso avremo **N, T, M** variabili **dipendenti**, che dipendono dalla variabile **indipendente (z)** (z): variabile indipendente del sist. di rif. locale che qualifica la posizione della sezione lungo la trave

$$y = f(x) \rightarrow N, T, M = f(z)$$

### Diagramma delle caratteristiche di sollecitazione

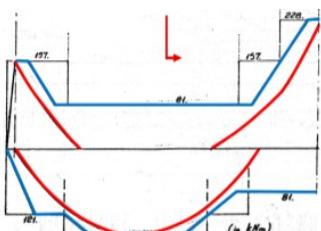
Esempio trave fuori spessore di solaio (diagramma panettiere)

Richiesta di prestazione meccanica: **sollecitazione** (domanda) → declinata in N, T, M

Curva rossa: **diagramma del momento flettente** (andamento di una delle caratteristiche di sollecitazione lungo la trave) → valore che assume momento flettente al variare della variabile indipendente z

Attraverso la determinazione diagramma caratteristiche sollecitazione saremo in grado di progettare la trave affinché in ogni sua sezione il **momento resistente** superi o sia almeno uguale al modulo del **momento sollecitante**.

Il momento resistente sarà determinato dalle **dimensioni della sezione** e dal **materiale** che la costituisce. Sulla base delle caratteristiche di sollecitazioni possiamo procedere a dimensionare le **dimensioni della trave e a definirne l'ingombro strutturale**.



DETERMINAZIONE DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE  
DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA

**Schema statico1**

Trave in semplice appoggio vincolata da una cerniera in A e un carrello in B  
 Solido di San Venant → conosce una sola dimensione z  
 $N, T, M$  di variabili z (non saranno più infinitamente continue e derivabili)

**Condizione necessaria** alla determinazione caratteristiche sollecitazione è che della struttura **siano già note le reazioni vincolari** (sistema di forze reagenti e agenti a cui le caratteristiche delle sollecitazioni devono fare equilibrio)

Procedimento

1) Denominare con una **lettera latina maiuscola** tutte le sezioni della trave in cui capita qualcosa di staticamente o geometricamente rilevante ai fini della definizione di sistema di riferimento locale (inizio trave: A, fine trave: B, C) o dove l'asse della trave conosce deviazioni delle linee d'asse).  
 Riconoscere le sezioni aiuta a riconoscere i **sottodomini** entro i quali le funzioni ( $N, T, M$ ) saranno continue

2) In ognuno di essi (sottodomini AC e CB) identificare una **generica sezione** ( $S_1$  ed  $S_2$ ) che li comprenda  
 $S_1$  punto di sezione generico che può andare tra A e C  
 $S_2$  punto di sezione generico che può andare tra C e B  
 La linea di sezione non può passare per C perché non c'è un vincolo.  
 (Se faccio passare la linea di distacco in C, dovrò calcolare  $N, T, M$  di  $S_1$  e  $N, T, M$  di C).

3) Definire **sistema di riferimento locale per ogni tratto di trave**

Traslare sistema di riferimento (terna di assi destrorsa positiva) con origine in A, anche in C (in ogni sezione singolare iniziale di ogni segmento di trave).

E' importante che il sistema di riferimento trasli dall'origine e ruoti a seconda della direzione della trave  
 Se l'asse subisce una variazione, anche la terna di assi la subirà ruotando su x.

4) Per ogni sotto dominio avremo un **dominio di esistenza** che avrà come limite di esistenza, il valore che assumerà la variabile indipendente (z)

SOTTODOMINIO AC	SOTTODOMINIO CB
DOMINIO DI ESISTENZA: $A \leq S_1 \leq C \rightarrow 0 \leq Z \leq L/2$	DOMINIO DI ESISTENZA: $C \leq S_2 \leq B \rightarrow 0 \leq Z \leq L/2$

5) **Ridisegnare la prima sezione  $S_1$**  della struttura della trave

Affinché il concio di trave sia in equilibrio per forza dovranno agire  $N, T, M$  per garantire l'equilibrio

6) **Ipotizziamo modulo e verso di  $N, T, M$**  (per convenzioni li ipotizzo positivi)

7) Procediamo scrivendo **equazioni equilibrio**

Sommatoria forze secondo  $z = 0 \rightarrow N=0$

Sommatoria forze secondo  $y = 0 \rightarrow T - P/2 = 0$

Sommatoria momenti intorno a  $x = 0 \rightarrow M - P/2 \cdot z = 0$

8) Per ogni equazione di equilibrio abbiamo solo una incognita ( $M, N, T$ ) e sono tutte funzioni di (z)  
 Il loro modulo e verso dipende dall'equilibrio e da (z).

9) Trasformo le equazioni in **funzioni**

$N(z)=0$  Funzione costante → valore costante nullo

$T(z)=P/2$  Funzione costante → valore  $P/2$

$M(z)=Pl/4$  Funzione polinomiale di primo grado (grado polinomio massimo esponente della potenza )

10) Siamo pronti per realizzare **diagrammi di  $N, T, M$  nel sottodomino AC**

Predisporre i tre riferimenti cartesiani

N) Qualunque si il valore di z, N è sempre nullo

T) Qualunque sia il valore di z, T è pari a  $P/2$

M) qualunque sia il valore di z,  $M_A= 0$  e  $M_C=Pl/4$

Ripeto lo stesso procedimento considerando la porzione di trave **tra  $S_2$  e B**

Ridisegno solo questa porzione, insieme al sistema di riferimento in C

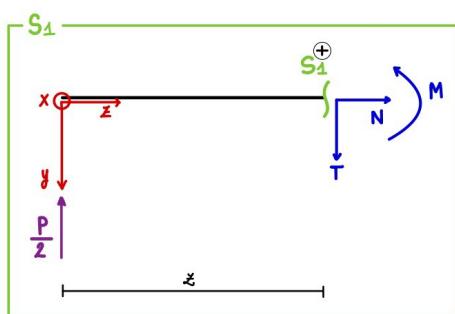
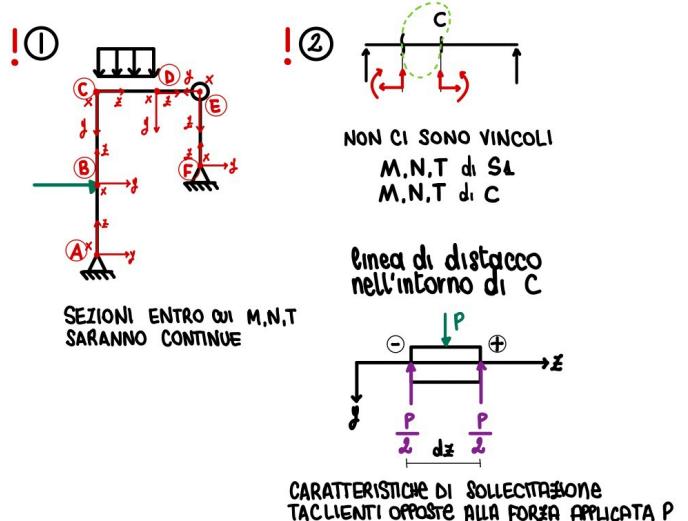
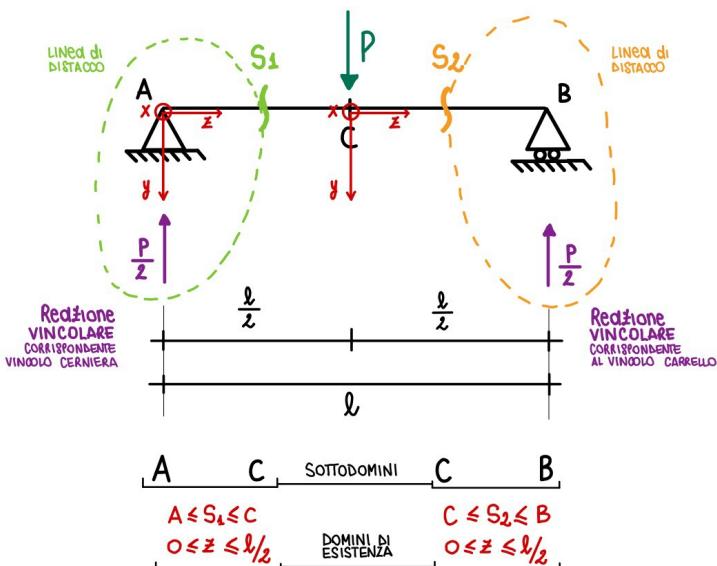
Disegno  $N, T, M$  (discordi rispetto alla terna di assi)

Dispongo le quote

Equazioni di equilibrio e funzioni

Aggiungere i risultati sul diagramma completandolo

# SCHEMA STATICO 1

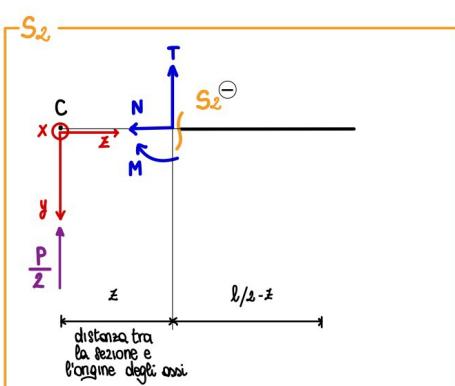


eq. di equilibrio

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \longrightarrow N = 0 \\ \sum F_y &= 0 \longrightarrow T - \frac{P}{z} = 0 \\ \sum M_{S1} &= 0 \longrightarrow M - \frac{P}{2} \cdot z = 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} N(z) &= 0 \\ T(z) &= \frac{P}{z} \\ M(z) &= \frac{P}{2} \cdot z = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} \end{aligned}$$

funzioni

$$\begin{aligned} M_A(z=0) &= 0 && \text{PUNTO INIZIALE} \\ M_C(z=l/2) &= \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} && \text{PUNTO FINALE} \end{aligned}$$

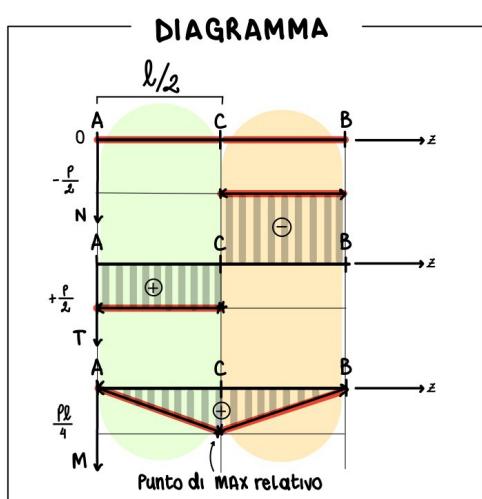


eq. di equilibrio

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \longrightarrow N = 0 \\ \sum F_y &= 0 \longrightarrow T + \frac{P}{z} = 0 \\ \sum M_{S2} &= 0 \longrightarrow M + \frac{P}{2} \cdot (\frac{l}{2} - z) = 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} N(z) &= 0 \\ T(z) &= -\frac{P}{z} \\ M(z) &= -\frac{P}{2} \cdot z + \frac{Pl}{4} \end{aligned}$$

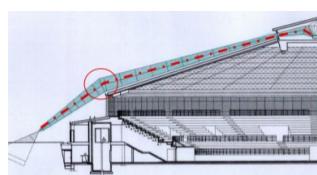
funzioni

$$\begin{aligned} M_C(z=0) &= +\frac{Pl}{4} && \text{PUNTO INIZIALE} \\ M_B(z=l) &= 0 && \text{PUNTO FINALE} \end{aligned}$$



Osservazioni

Cosa vuol dire fisicamente diagramma di taglio? Nell'intorno di questi punti particolari conviene fare linea di distacco e tradurre i diagrammi in forze



Dalla struttura reale al modello trave (slide 6)  
Trave ad altezza variabile in calcestruzzo armato che copre un capannone industriale

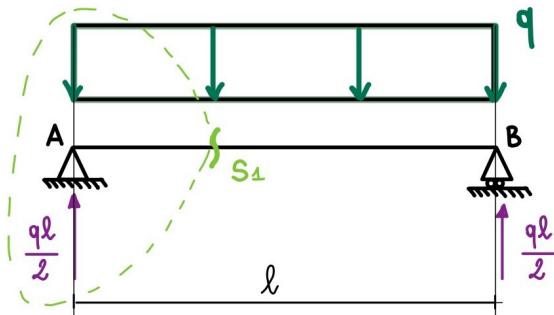
**Momento resistente** (offerta prestazione meccanica) è proporzionale all'altezza della trave

La trave è stata dimensionata per offrire massima prestazione meccanica nella mezzeria  
Condizione di carico in cui la domanda della prestazione massima nella mezzeria.

DETERMINAZIONE CARATTERISTICHE SOLLECITAZIONE STRUTTURA ISOSTATICA  
CON CARICO DISTRIBUITO LUNGO TUTTA LA LUCE L

**Schema statico 2**

**Schema statico 2**



**eq. di equilibrio**

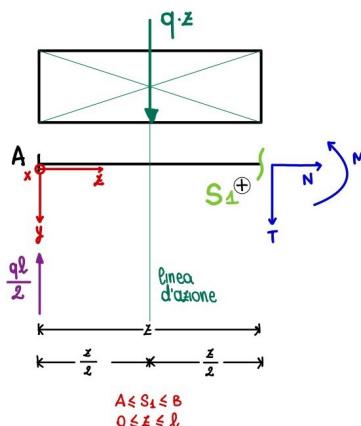
$$\sum F_x = 0 \longrightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow T + (q \cdot z) - \frac{ql}{2} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow M + (q \cdot z) \cdot \frac{z}{2} - \frac{ql}{2} \cdot z = 0$$

BRACCIO  
distanza da S1 a q \cdot z = \frac{z}{2}

**funzioni**



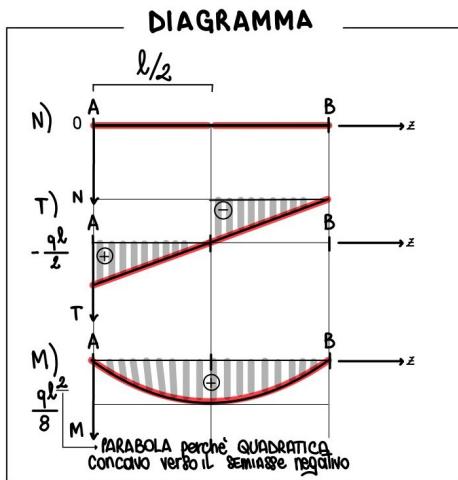
$T=0$  quando

$$-qz + \frac{ql}{2} = 0$$

$$z = \frac{l}{2}$$

essendo quadratica  
presenta un punto  
MAX e MIN

funzione taglio  
sempre = alla funzione  
derivata del momento



Sezioni singolari in A e B

Una sola sezione generica compresa tra due sezioni singolari A B

Sistema di riferimento locale in A

Traccio linea di distacco comprendente punto A e passante per S1 → ridisegno la struttura

Determino la **risultante del carico** q della porzione del carico considerata

Funzione polinomiale M3: calcolo derivata prima per trovare punto massimo e minimo di un momento

Funzione taglio = funzione derivata del momento

Dove la funzione del momento conosce massimo o minimo, la funzione taglio deve conoscere uno zero.

$N(z) = 0$

$$T(z) = -qz + \frac{ql}{2}$$

$$T_A(z=0) = \frac{ql}{2}$$

$$T_B(z=l) = -\frac{ql}{2}$$

$$M(z) = -\frac{qz^2}{2} + \frac{ql}{2} \cdot z$$

$$M_A(z=0) = 0$$

$$M_B(z=l) = 0$$

$$M_3(z=\frac{l}{2}) = +\frac{ql^3}{8}$$

cercare la derivata prima

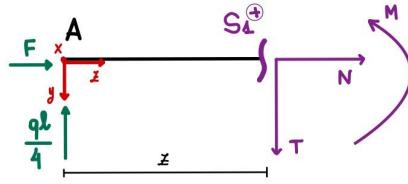
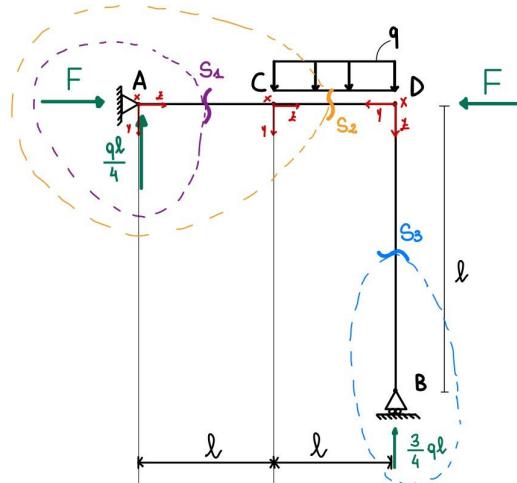
$$y(z) = az^n + bz^{n-1} + \dots + cz^4 + d$$

$$\frac{dy}{dz}(z) = y'(z) = a \cdot n \cdot z^{n-1} + b(n-1)z^{n-2} + c \cdot 1 \cdot z$$

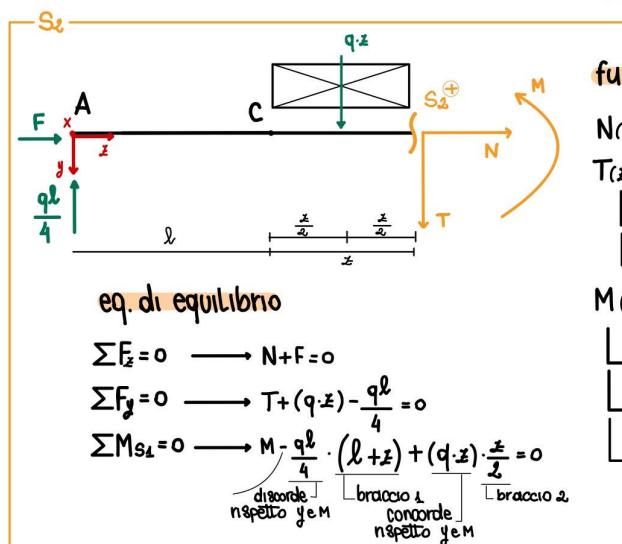
$$\frac{dM}{dz}(z) = -\frac{q}{2} \cdot 2 \cdot z^1 + \frac{ql}{2} \cdot z^{1-1} = -qz + \frac{ql}{2}$$

$$\frac{dM}{dz} = 0 \quad -qz + \frac{ql}{2} = 0 \quad z = \frac{l}{2}$$

$$M(z=\frac{l}{2}) = \frac{q}{2} \cdot (\frac{l}{2})^2 + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql}{8} + \frac{ql}{4} = +\frac{ql^2}{8}$$



S <sub>4</sub>	eq. di equilibrio	funzioni
	$\sum F_x = 0 \rightarrow N + F = 0$	$N(z) = -F$
	$\sum F_y = 0 \rightarrow T - \frac{q}{4}z = 0$	$T(z) = \frac{q}{4}z$
	$\sum M_{S_4} = 0 \rightarrow M - \frac{q}{4}z \cdot z = 0$	$M(z) = \frac{q}{4}z^2$
		$\rightarrow M_A(z=0) = 0$
		$\rightarrow M_C(z=l) = \frac{q}{4} \cdot l \cdot l = \frac{q}{4}l^3$



funzioni

$$N(z) = -F$$

$$T(z) = -\left(q \cdot z\right) + \frac{q}{4}z$$

$$\rightarrow T_c(z=0) = \frac{q}{4}z$$

$$\rightarrow T_d(z=l) = -\frac{3}{4}qz$$

$$M(z) = -\frac{q}{2}z^2 + \frac{q}{4}z \cdot z + \frac{q}{4}z^2$$

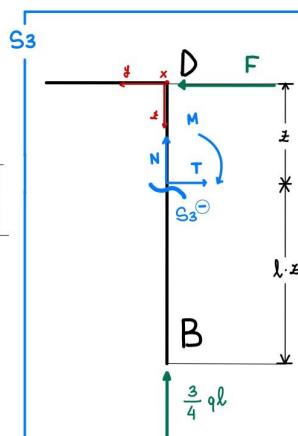
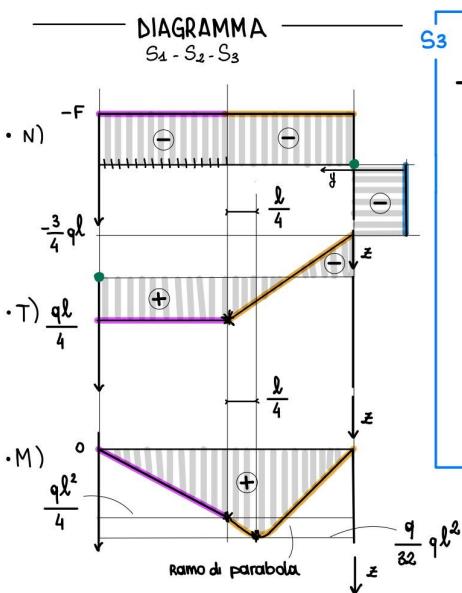
$$\rightarrow M_c(z=0) = \frac{q}{4}z^2$$

$$\rightarrow M_D(z=l) = 0$$

$$\rightarrow M_B(z=l) = 0$$

procedimento derivata

- valuto  $\frac{dM}{dz}$
- impongo  $\frac{dM}{dz} = 0$
- trovo o della D →  $z_0$
- det. funz. M degli o →  $M(z_0)$



eq. di equilibrio	funzioni
$\sum F_x = 0 \rightarrow N + \frac{3}{4}qz = 0$	$N(z) = -\frac{3}{4}qz$
$\sum F_y = 0 \rightarrow T = 0$	$T(z) = 0$
$\sum M_{S_4} = 0 \rightarrow M = 0$	$M(z) = 0$

$$M(z_0 = \frac{l}{4}) = -\frac{q}{2} \cdot \frac{l^2}{16} + \frac{q}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} + \frac{q}{4}z^2 = \\ = ql^2 \frac{-1+2+8}{32} = \boxed{\frac{q}{32}ql^2}$$

PUNTO MAX

Tracciamento dei diagrammi di sforzo normale, taglio, momento flettente di una scala in calcestruzzo armato, con carico uniformemente distribuito

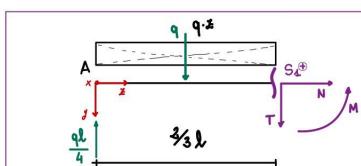
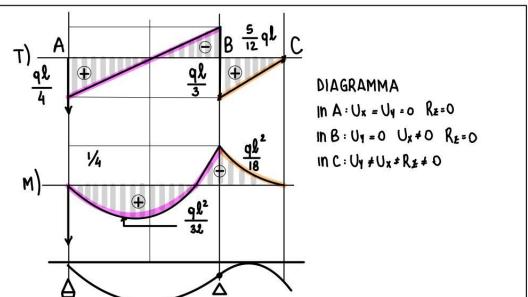
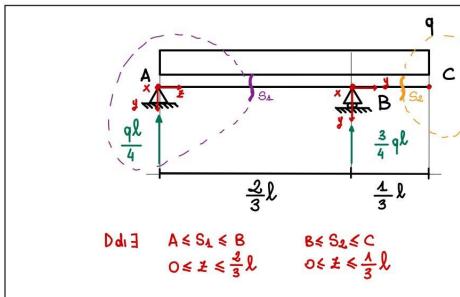
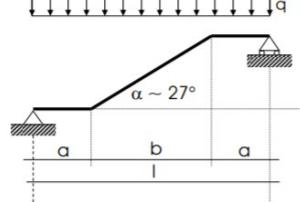
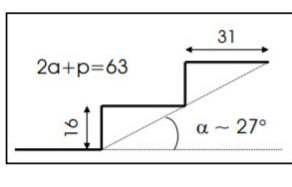
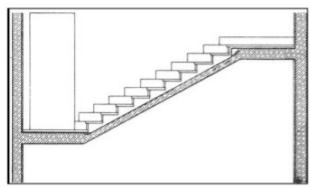
**Trave a ginocchio in calcestruzzo armato gettato in opera per la rampa-scala di un edificio.**

Supponendo che i pianerottoli e la rampa siano sostenuti da unico corpo trave che conosce due deviazioni della linea d'asse, e supponendo che la trave risulti essere appoggiata sui muri di testata

Trave in semplice appoggio (carico uniformemente distribuito  $q$  lungo la proiezione della scala)  
Caratteristiche sollecitazione trave

Considero alcune forze per il sistema di riferimento locale, oltre che per il globale  
(in questo caso scrivo le equazioni di equilibrio seguendo il sistema di riferimento globale)  
Devo spostare le forze valutate per il sistema di riferimento locale

Schema 1 (16.11)



### eq. di equilibrio

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow T + q \cdot z - \frac{qL}{4} = 0$$

$$\sum M_{S_L} = 0 \longrightarrow M + \frac{q \cdot z^2}{2} - \frac{qL \cdot z}{4} = 0$$

### funzioni

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = +\frac{qL}{4} - q \cdot z$$

$$\rightarrow T_A (z=0) = \frac{qL}{4} - q \cdot 0 \longrightarrow \frac{qL}{4}$$

$$\rightarrow T_B (z=\frac{2L}{3}) = \frac{qL}{4} - q \cdot \frac{2L}{3}$$

$$M_{S_L}(z) = -\frac{qz^2}{2} + \frac{qLz}{4}$$

$$\rightarrow M_A (z=0) = -\frac{q \cdot 0^2}{2} + \frac{q \cdot 0}{4} = 0$$

$$\rightarrow M_B (z=\frac{2L}{3}) = -\frac{q}{2} \cdot \frac{4}{9} L^2 + \frac{qL}{4} \cdot \frac{2L}{3} = -\frac{2}{9} qL^2 + \frac{1}{6} qL = -\frac{1}{18} qL^2$$

$$\rightarrow M (z_0 = ) = 0$$

$$\frac{dM}{dz} = -\frac{q}{2} z + \frac{qL}{4} = qz + \frac{qL}{4}$$

$$\frac{dM}{dz} = 0$$

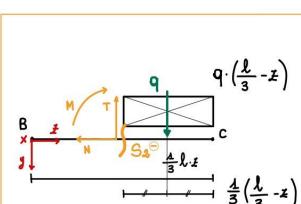
$$qz = \frac{qL}{4} \longrightarrow z = \frac{L}{4}$$

$$M_0 (z_0 = \frac{L}{4}) = -\frac{q}{2} \cdot \frac{L^2}{16} + \frac{qL}{4} = -\frac{qL^2}{32} + \frac{qL^2}{16} = \frac{qL^2}{32}$$

$$N = 0 \longrightarrow -\frac{qz^2}{2} + \frac{qLz}{4} = 0 \longrightarrow z \left( -\frac{qz}{2} + \frac{qL}{4} \right) = 0$$

$$z = 0$$

$$z = \frac{qL}{4} \cdot \frac{4}{q} = \frac{L}{4}$$



### eq. di equilibrio

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow T - q \left( \frac{l}{3} - z \right) = 0$$

$$\sum M_{S_L} = 0 \longrightarrow M + q \cdot \left( \frac{l}{3} - z \right) \cdot \frac{l}{2} \left( \frac{l}{3} - z \right) = 0$$

### funzioni

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = -qz + \frac{qL}{3}$$

$$\rightarrow T_B (z=0) = \frac{qL}{3}$$

$$\rightarrow T_C (z=\frac{l}{3}) = \frac{qL}{3}$$

$$M_{S_L}(z) = -qz^2 + \frac{qL}{3}z - \frac{qL^2}{18} \longrightarrow \text{funzione di } z \text{ grado } n=2$$

$$\rightarrow M_B (z=0) = -\frac{qL^2}{18}$$

$$\rightarrow M_C (z=\frac{l}{3}) = -\frac{qL^2}{18} + \frac{qL^2}{9} - \frac{qL^2}{18} = 0$$

$$\rightarrow M_0 (z_0 = \frac{l}{3}) = 0$$

$$\frac{dM}{dz} = -\frac{q}{2} z + \frac{qL}{3}$$

$$\frac{dM}{dz} = 0 \longrightarrow -qz + \frac{qL}{3} = 0$$

$$z_0 = \frac{L}{3}$$

$$\rightarrow M_0 (z_0 = \frac{L}{3}) = 0$$

Schema 2

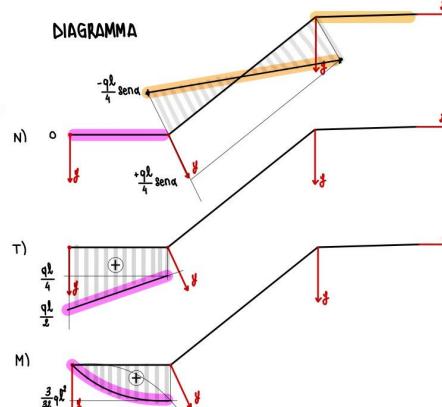
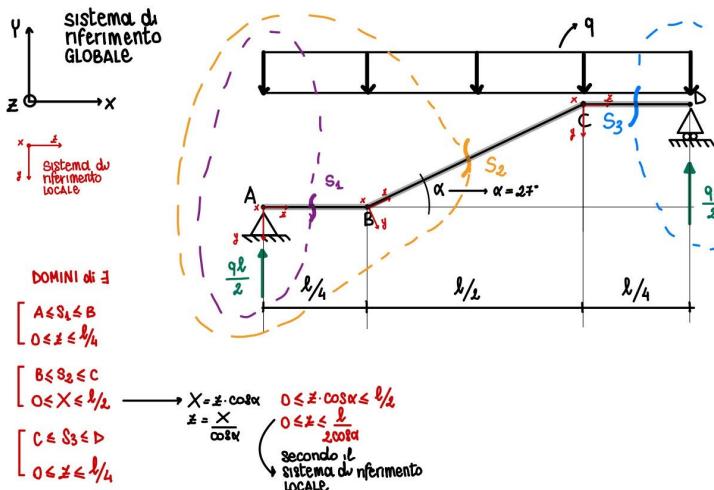
In alcuni casi meglio "traslocare" tutto nel sistema di riferimento LOCALE.

Carico uniformemente distribuito  $q$  tra sezione A ed E

Ginocchio sezione C

Tratto inclinato fino a B

4 sezioni singolari A E C B



**S<sub>1</sub>**

**equazioni di equilibrio**

$$\sum F_x = 0 \quad N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad T + qz - \frac{ql}{2} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad M + \frac{qz^2}{2} - \frac{ql}{2} \cdot z = 0$$

**funzioni**

$$N(z) = 0 \quad T(z) = q \cdot z + \frac{ql}{2} \rightarrow T_A(z=0) = \frac{ql}{2}$$

$$T_B(z=\frac{l}{4}) = \frac{ql}{4}$$

$$M(z) = \frac{qz^2}{2} + \frac{ql}{2} \cdot z$$

$$M_B(z=\frac{l}{4}) = -\frac{q}{2} \cdot \frac{l^2}{16} + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{3}{32} ql^2$$

$$\frac{dM}{dz} = -qz + \frac{ql}{2} \rightarrow \frac{dM}{dz} = 0 \rightarrow z = \frac{l}{2}$$

momento int. = cd.  $l/2$ , non ha senso, calcolare il momento nel punto perché è fuori dal dominio

**S<sub>2</sub>**

Dato  $R_y$  voglio volutamente la direzione dell'angolo inclinato  $x$

$$R_{Yg} = R_y \cos \alpha$$

$$R_{Xg} = R_x \cos \alpha$$

$$R_{Yg} = R_y \sin \alpha$$

$$R_{Xg} = R_x \sin \alpha$$

**monotona crescente**  
calcolare derivata seconda

$$\rightarrow M'' = \frac{dM}{dz} = -q \rightarrow il segno indica la concavità della parabola$$

**equazioni di equilibrio**  
secondo il sistema di riferimento locale

per il momento mi dimentico di  $N$  e  $T$

$$\sum F_x = 0 \quad R_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_y + \frac{ql}{2} - qx - \frac{ql}{4} = 0$$

$$\sum M_E = 0 \quad M + qx\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{ql}{4} \cdot \left(x + \frac{l}{8}\right) - \frac{ql}{2} \cdot \left(x + \frac{l}{4}\right) = 0 \rightarrow M = -\frac{qx^2}{2} + \frac{q}{4}lx + \frac{3}{32}ql^2$$

Dobbiamo ora passare da  $R_y$  e  $R_x$  a  $N$  e  $T$

**Relazione tra  $N$ ,  $T$ ,  $R_y$ ,  $R_x$**

$$N = +R_x \cos \alpha + R_y \sin \alpha \rightarrow N = -\left[qx - \frac{ql}{4}\right] \cdot \sin \alpha$$

$$T = +R_x \sin \alpha - R_y \cos \alpha \rightarrow T = -\left[qx - \frac{ql}{4}\right] \cdot \cos \alpha$$

**funzioni**

$$N(z) = \left[q \cdot z \cos \alpha - \frac{ql}{4}\right] \sin \alpha$$

$$N_B \left[ \begin{matrix} z=0 \\ \frac{x}{2}=0 \\ \cos \alpha=1 \end{matrix} \right] = -\frac{ql}{4} \sin \alpha$$

$$N_C \left[ \begin{matrix} z=l/2 \\ \frac{x}{2}=l/2 \\ \cos \alpha=1 \end{matrix} \right] = +\frac{ql}{4} \sin \alpha \quad (\text{sist. rif. GLOBALE})$$

$T(z) = -\left[q \cdot z \cos \alpha - \frac{ql}{4}\right] \cos \alpha$

$$T_B = +\frac{ql}{4} \cos \alpha$$

$$T_C = -\frac{ql}{4} \cos \alpha$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{q}{4}lx + \frac{3}{32}ql^2$$

$$M_B = \frac{3}{32}ql^2$$

$$M_C = \frac{-ql^2}{8} + \frac{q}{4}lx + \frac{3}{32}ql^2$$

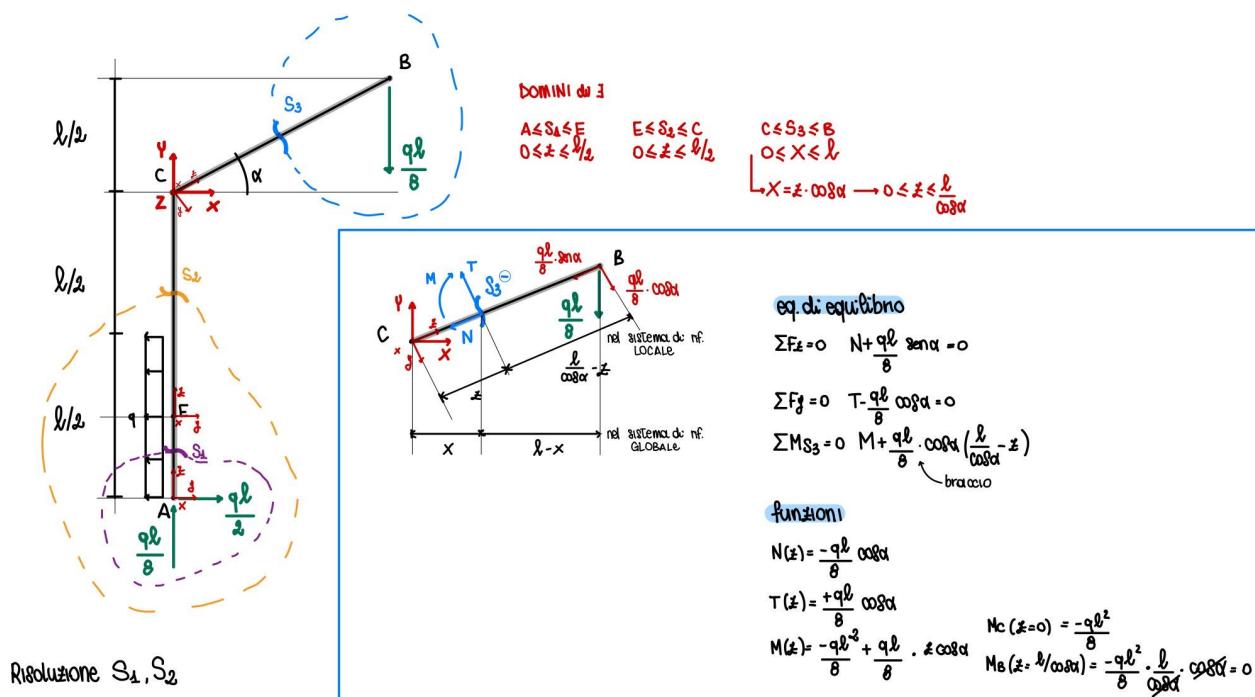
$$M_3 \rightarrow \frac{dN}{dz} = -qx + \frac{ql}{4}$$

derivata, seconda,  $x$

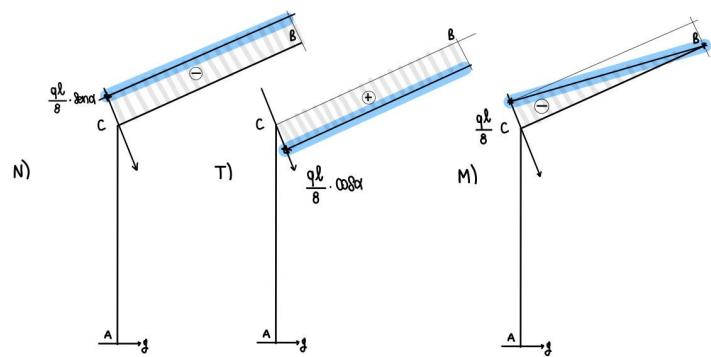
$$\frac{dM}{dx} = 0 \quad x = \frac{l}{2}$$

$$M(x=l/4) = \frac{ql^2}{8}$$

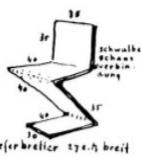
Schema 3



DIAGRAMMA



Tracciamento delle caratteristiche di sollecitazione utili nel leggere un oggetto di architettura  
Sistema di trave notevole (gherber e portale a tre cerniere)



### Esercitazione

Determinazione delle caratteristiche di sollecitazione in sistemi di travi comunque inclinate

#### La sedia zig zag, Rietveld, 1934

Oggetto di design composto figurativamente da un'unica lastra in legno.

Costruttivamente risulta avere varie assi unite (assiemate) e degli incastri a coda di rondine (immaginati da Rietveld del disegno).

Modello fisico matematico (sistema statico) (geometria, sistema di carico ...)

#### Dalla struttura al modello di carico

1) Dalla struttura nello spazio al modello piano;

Le assi di legno possono essere considerate travi (ordine di grandezza inferiore alla direttrice)

2) individuazione della **linea d'asse** delle travi;

3) **condizioni di applicabilità** della teoria delle travi; (lo considero come **solido di Saint Venant**)

4) dal vincolo **reale** al vincolo **ideale**;

Dobbiamo vincolare una sola trave monolitica.

**Problema:** passare dal vincolo ideale (oggetto fisico che vincola la sedia al pavimento) al vincolo esterno che abbiamo imparato a conoscere (incastro, carrello, cerniera...)

Uno dei piedini ha una superficie inferiore gommata che sviluppa attrito (impedisce traslazione verticale e orizzontale) - elimina due gradi di libertà (assimilabile a cerniera esterna)

Altro piedino in acciaio (non gommato) attrito molto basso - non riesce ad eliminare traslazione ortogonale al pavimento, lascia libera la sedia di traslare orizzontalmente (carrello ideale)

+ una possibile condizione di carico (persona seduta) forza stimata  $F = 60\text{daN}$

Definisco lunghezze (parametrizzate in forma simbolica:  $L$  ed  $L/2$ ) ed angoli  $45^\circ$

5) la **condizione di carico**.

Obiettivo: **determinare reazioni vincolari** (condizione necessaria per tracciare diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione)

I diagrammi ci raccontano, sezione per sezione, il loro **stato di sollecitazione** (modulo e verso delle forze interne)

Caratteristiche sollecitazione sono due volte significative ... 09:04

Momento flettente induce curvatura nell'asse della trave

I gomiti della diagonale particolarmente sollecitati (**momento flettente massimo modulo nei gomiti**)

Dimensioni trave costanti → prestazioni meccaniche costanti a fronte di sollecitazioni variabili (maggiori nei gomiti)

Rietveld ha previsto una **vite** infilata alla traditrice per connettere gomito e listello.

#### **Calcolo delle reazioni vincolari**

Controllo condizione isostaticità  $GdL = GdV \rightarrow GdL \geq 3n - 3$

Sistema di riferimento globale

Inserire lettere nelle sezioni singolari

Determinare risultante di forze distribuite

Scomporre le forze applicate secondo le direzioni degli assi X e Y.

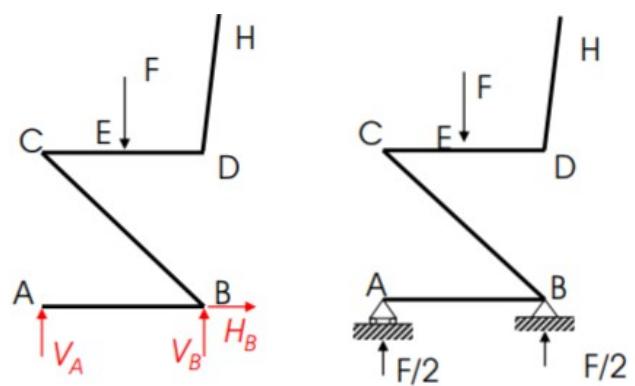
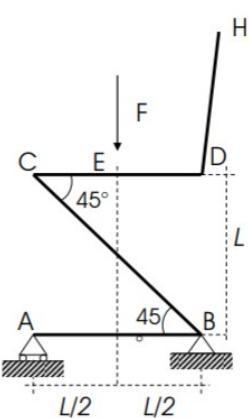
Sostituire vincoli con reazioni incognite

$$\sum H = 0 \rightarrow H_B = 0 \rightarrow H_B = 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A + V_B - F = 0 \rightarrow V_B = F/2$$

$$\sum MB = 0 \rightarrow F \cdot L/2 - V_A \cdot L = 0 \rightarrow V_A = F - V_B = F/2$$

Nuova figura con le reazioni trovate



**ESEMPIO APPLICATIVO 1****Torre per telecomunicazioni Montjuic**

Barcellona, 1989-1992

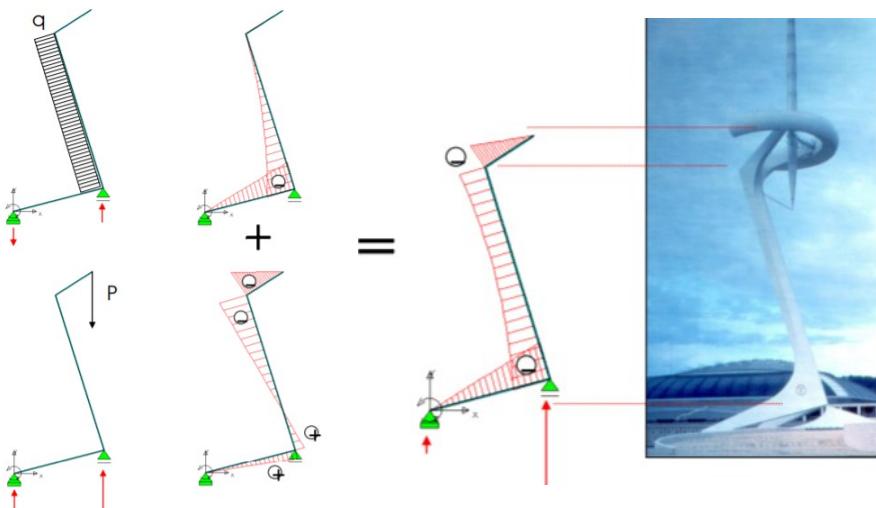
Progettista: S. Calatrava

Altezza: 136 m; inclinazione del fusto: 17° struttura portante in acciaio

Vediamo se l'andamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione ha ispirato Calatrava nel progettare questa struttura.

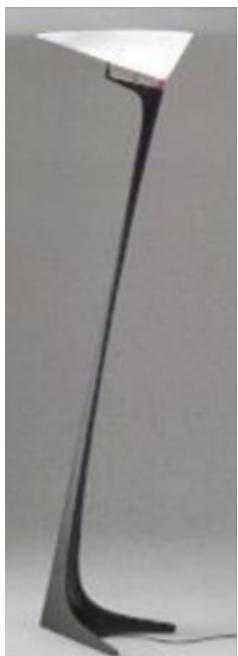
Predimensionamento qualitativo

Il dimensionamento della struttura ricalca fedelmente l'andamento del diagramma di momento flettente



Condizione puntuale di tangenza tra struttura di vincolo e trave che differiscono per condizioni di caricoForza peso  $P$  che corrisponde al peso di tutti gli elementi portati (ripetitore e torroidale) Alla forza  $P$  si aggiunge carico  $q$  Combinare effetti di due azioni combinabili simultaneamenteDiagramma momento flettenteMassimi in corrispondenza dei gomiti, è un punto in cui si annulla (come la sedia Rietveld)Sommare le due funzioni e ri-diagrammare tuttoCorrispondenza tra andamento del momento flettente e l'andamento della dimensione sezione trasversaleMomento flettente cresce (cresce sollecitazione)

Calatrava fa crescere dimensioni sezione trasversale facendo così crescere le risorse

**ESEMPIO APPLICATIVO 2****Lampada da terra Montjuic, 1990**

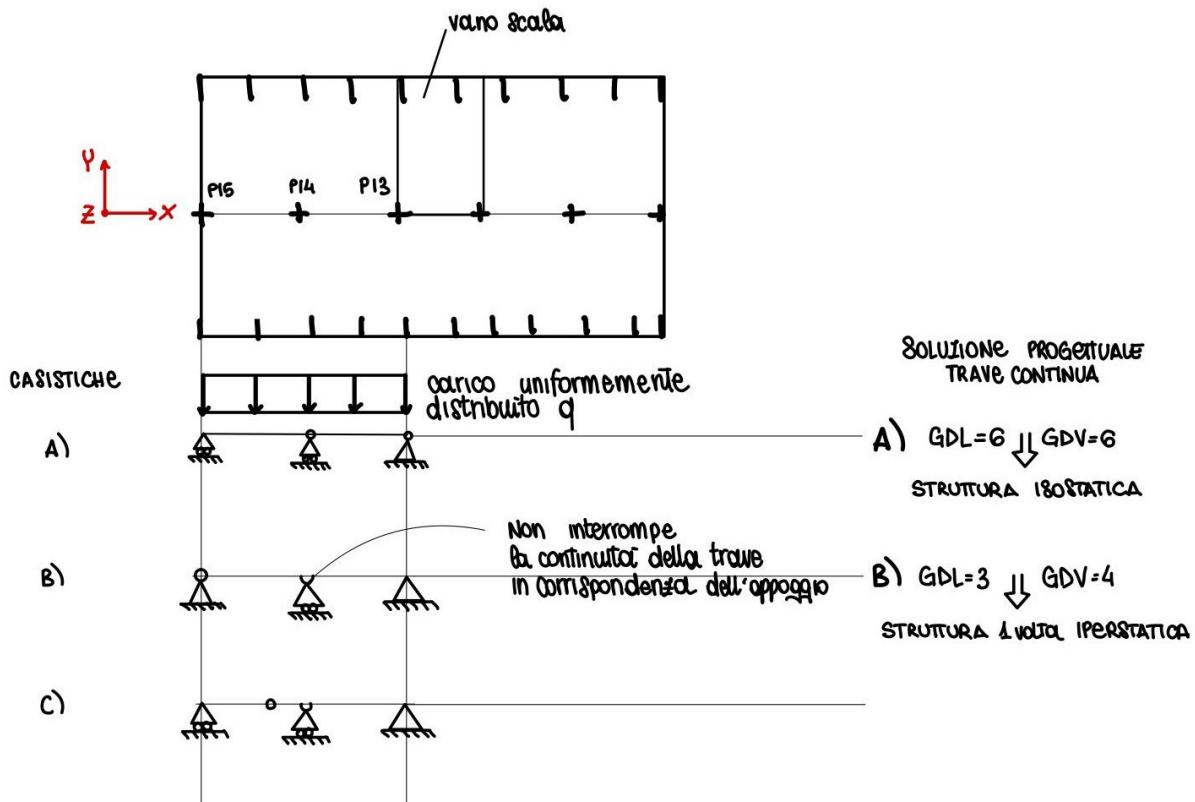
Design: S. Calatrava

Dimensioni L/W/H: 50.8x45.72x190.5 [cm]

Esercizio:

1. determinare un possibile schema statico piano;
2. calcolo delle reazioni vincolari;
3. calcolo delle caratteristiche di sollecitazione;
4. tracciamento della deformata qualitativa;
5. discutere alla luce dei risultati ottenuti:
  - a. il dimensionamento della struttura;
  - b. la stabilità della struttura (vincoli monolateri)

### Le TRAVI GERBER



**Campata:** distanza tra due vincoli esterni consecutivi

Schema statico che vede due travi distinte, vincolate da una cerniera (in corrispondenza del pilastro P13) in corrispondenza di P14 e P15 considero due carrelli

#### A) Prima possibilità:

Struttura isostatica composta da due travi in semplice appoggio, con carico uniformemente distribuito

#### B) Seconda possibilità:

Considerare la trave come corpo unico

Soluzione progettuale: trave continua, non conosce soluzione di continuità quando attraversa vincoli di campata

#### C) Terza possibilità

Schema statico isostatico che preserva continuità della trave sull'appoggio centrale

#### Trave Gerber

Isostatica: 6GDL 6GDV

La cerniera interna non coincide più con il carrello esterno, ma è spostata in campata (P15-P14)  
Potrebbe indifferentemente migrare nell'altra campata

Quali sono i criteri per cui possiamo definire una trave Gerber?

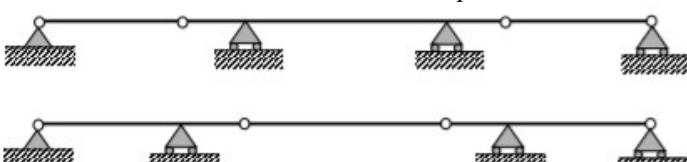
Quali sono i vantaggi meccanici di una trave Gerber rispetto alla soluzione di travi continue o giustapposte in semplice appoggio?

Soluzione A e C: possiamo ottenere comportamento isostatico

Per comportamento meccanico interno in termini di diagrammi di caratteristiche di sollecitazione no, (fornito delle slide).

#### Definizione trave Gerber

È una trave isostatica ad asse rettilineo (non necessariamente ad asse orizzontale ma abitualmente si), che per soddisfare la qualità di isostaticità richiesta, deve essere vincolata da **almeno una cerniera** e da un numero che può essere variabile di **carrelli** e di **appoggi** (denotato con n) e che però (condizione necessaria ancorché sufficiente perché sia isostatica), deve includere **n - 1 cerniere interne** che non siano disposte in corrispondenza degli appoggi, ma che siano collocate nelle varie campate avendo già definito la campata quale porzione di trave compresa tra due vincoli esterni consecutivi. Condizione che assicura che numero GDL corrisponda numero di GDV

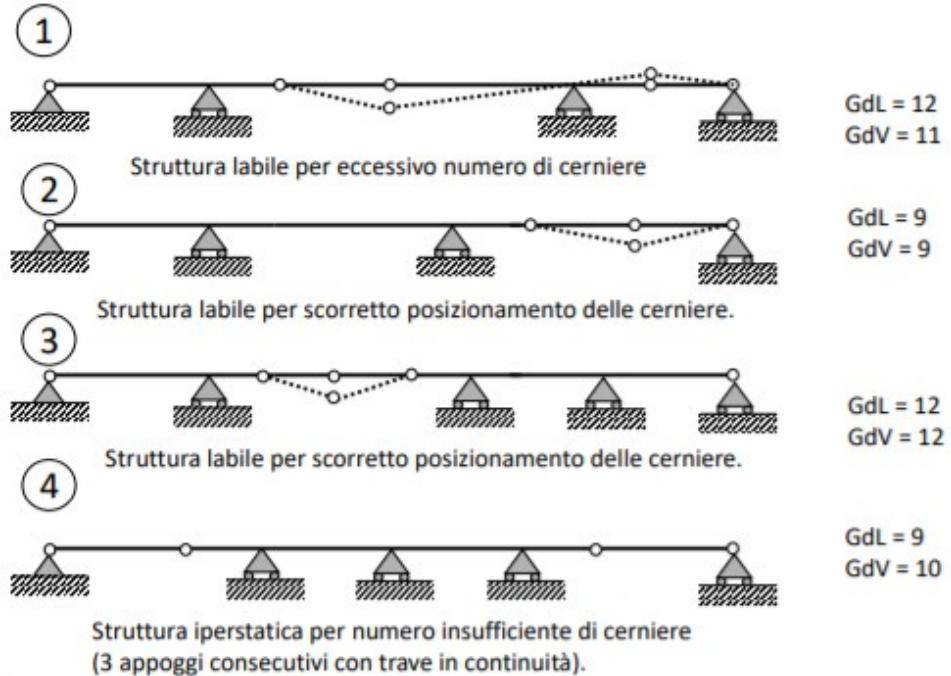


Dobbiamo includere delle restrizioni al progetto di una trave Gerber: che sui rifanno alla posizione nelle campate delle n-1 cerniere interne:

Non ci debbano essere più di due cerniere interne in corrispondenza delle **campate interne**

E non più di una nelle **campate di bordo**, essendo quelle che includono uno dei vincoli di estremità

#### Esempi di scorretto posizionamento delle cerniere



Collocare la cerniera interna in una campata è strumento per garantire che nel punto della cerniera interna, quella trave, li' non sarà soggetta a momento flettente.

**Possiamo pilotare il comportamento meccanico dell'architettura**

#### **Analisi quantitativa della trave Gerber**

Condizione di carico varia

(carico uniformemente distribuito sulle prime due campate e parte della terza) e una forza concentrata

Campate con lunghezze differenti (le due di estremità luce pari a  $4/3l$ , la centrale centrale  $2l$ )

Tre carrelli esterni in C, B, D.

Due cerniere collocate nelle due campate laterali distanti  $l/3$  dai carrelli centrali

**Simmetrica per condizioni di vincolo**, ma non per condizioni di calcolo

#### **Determiniamo diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione**

Nel caso in cui il carico distribuito percorri i vincoli, lo dividiamo in carico trave che insiste su AE e su ED

Abbiamo bisogno di due equazioni ausiliarie (che possiamo procurarvele facendo passare linee di distacco per le due cerniere interne)

Equazioni cardinali della statica

Due equazioni ausiliarie

Due linee di distacco passanti per la cerniera interna e vincolo esterno

Determinò due reazioni vincolari, che sostituisco nelle equazioni cardinali della statica ottenendo le altre reazioni vincolari verticali

Per semplificare le espressioni, assumo che  $F=ql/2$

Trovo moduli reazioni vincolari verticali

Ridisegno struttura, in debita scala grafica, le reazioni vincolari dei quattro vincoli esterni

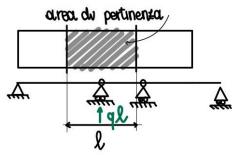
#### **Esempio Area di carico/lunghezza di carico/area di pertinenza/lunghezza di pertinenza**

Cerniere interne collocate in corrispondenza dei carrelli

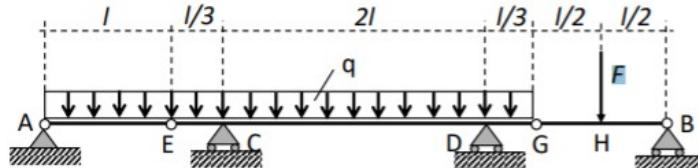
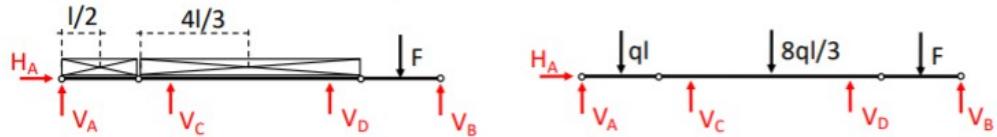
In questo particolare caso il modulo delle reazioni vincolari può essere determinato con una scorciatoia che non considera l'equilibrio, ma la geometrica della struttura.

La reazione vincolare sarà chiamata ad equilibrare forza risultante di quella parte di carico distribuito che sta a cavallo del vincolo.

Questa scorciatoia è vera solo se sono nella condizione di avere tante travi in semplice appoggio giustapposte. → Si sottostimano però le reazioni vincolari



## Esempio di trave Gerber

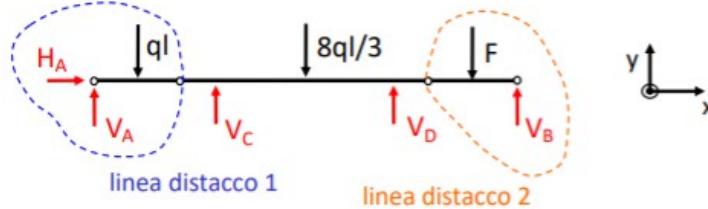
Calcolo delle reazioni vincolari

$$1) \sum H = 0 \quad H_A = 0$$

$$2) \sum V = 0 \quad V_A + V_B + V_C + V_D - ql - \frac{8}{3}ql - F = 0$$

$$3) \sum M_C = 0 \quad -V_A \cdot \frac{4}{3}l + ql \cdot \frac{5}{6}l - \frac{8}{3}ql \cdot l + V_D \cdot 2l + V_B \cdot \frac{10}{3}l - F \cdot \frac{17}{6}l = 0$$

## Calcolo delle reazioni vincolari



## Linea di distacco 1

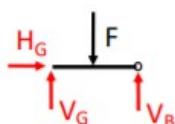


## Equazione ausiliaria 1

$$\sum M_E = 0 \quad ql \cdot \frac{l}{2} - V_A \cdot l = 0$$

$$V_A = \frac{ql}{2}$$

## Linea di distacco 2



## Equazione ausiliaria 2

$$\sum M_G = 0 \quad V_B \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$V_B = \frac{F}{2}$$

Noti i valori di  $V_A$  e  $V_B$  li sostituiamo nelle equazioni generali determinando le restanti incognite  $V_C$  e  $V_D$

Dall'eq. 3) si ricava

$$V_D = \frac{5}{4}ql + \frac{7}{12}F$$

Dall'eq. 2) si ricava

$$V_C = \frac{23}{12}ql - \frac{1}{12}F$$

**N.B.: Il verso della reazione  $V_C$  non è determinabile a priori.**

Al fine di semplificare le espressioni di  $V_C$  e  $V_D$ , come caso particolare, si assuma  $F = ql/2$ . Si avrà, quindi:

$$V_A = \frac{ql}{2}$$

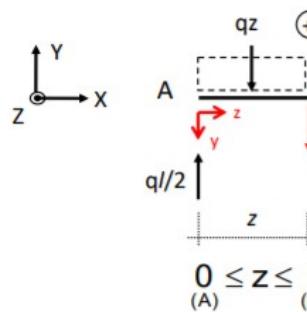
$$V_B = \frac{ql}{4}$$

$$V_C = \frac{15}{8}ql$$

$$V_D = \frac{37}{24}ql$$

## Studio e calcolo delle caratteristiche di sollecitazione

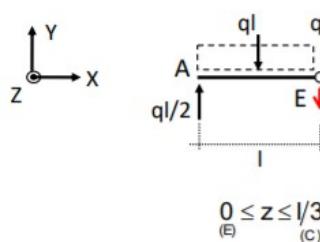
- 1) Individuazione di un sistema di riferimento locale per ogni tratto di trave compreso tra 2 sezioni singolari.  
In questo caso, essendo la trave rettilinea, l'orientamento del sistema di riferimento locale resta invariato in ogni tratto.
- 2) Individuazione di una generica sezione si per ogni tratto di trave compreso tra due sezioni singolari.

Sezione S<sub>1</sub>

$$\begin{aligned}\rightarrow T_A &= ql/2 \\ \rightarrow T_E &= -ql/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum H &= 0 \rightarrow N = 0 \\ \sum V &= 0 \rightarrow T - ql/2 + qz = 0 \\ &\rightarrow T = -qz + ql/2 \\ \sum M_{S1} &= 0 \rightarrow M - ql/2 \cdot z + qz^2/2 = 0 \\ &\rightarrow M = f(z) = -qz^2/2 + ql/2 \cdot z\end{aligned}$$

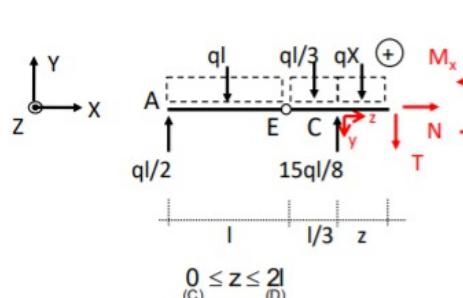
$$\begin{aligned}\rightarrow M_A &= 0 \\ \rightarrow M_E &= 0 \\ \rightarrow \frac{dM}{dz} &= -qz + \frac{ql}{2} \\ \rightarrow \frac{dM}{dz} &= 0 \rightarrow z = \frac{l}{2} \rightarrow M\left(z = \frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8}\end{aligned}$$

Sezione S<sub>2</sub>

$$\begin{aligned}\rightarrow T_E &= -ql/2 \\ \rightarrow T_C &= -5ql/6 \\ \rightarrow M_E &= 0 \\ \rightarrow M_C &= -\frac{2ql^2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum H &= 0 \rightarrow N = 0 \\ \sum V &= 0 \rightarrow T - ql/2 + ql + qz = 0 \\ &\rightarrow T = -qz - ql/2 \\ \sum M_{S2} &= 0 \rightarrow M - \frac{ql}{2} \cdot (l+z) + ql \cdot \left(\frac{l}{2} + z\right) + \frac{qz^2}{2} = 0 \\ &\rightarrow M = f(z) = -qz^2/2 - ql/2 \cdot z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \frac{dM}{dz} &= -qz - \frac{ql}{2} \\ \rightarrow \frac{dM}{dz} &= 0 \rightarrow z = -\frac{l}{2} && \text{ascissa fuori dal dominio} \\ \rightarrow \frac{d^2M}{dz^2} &= -q && \text{concavità del diagramma verso il semiasse negativo di } M\end{aligned}$$

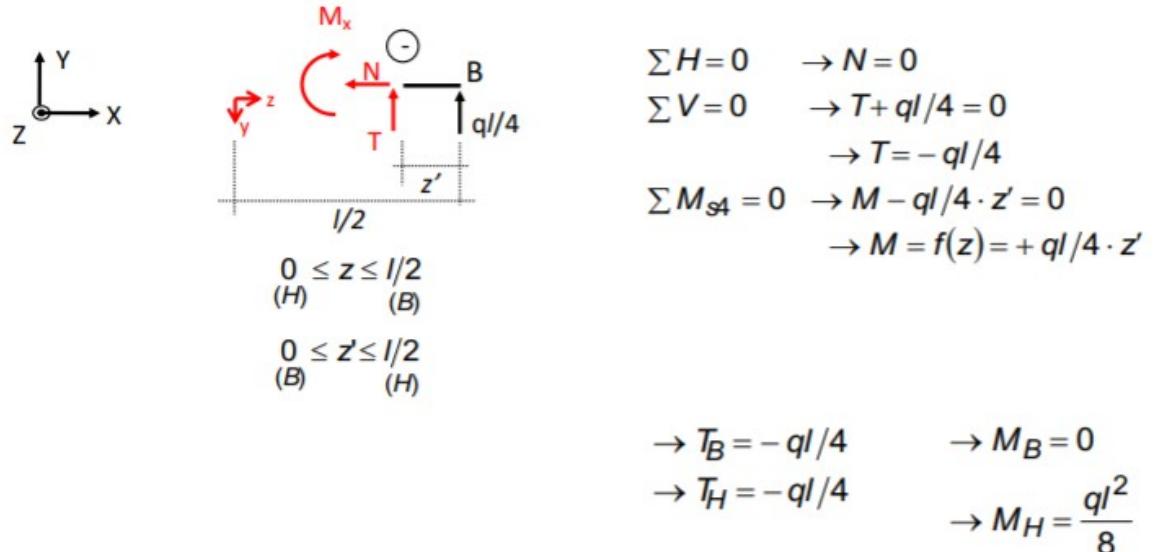
Sezione S<sub>3</sub>

$$\begin{aligned}\rightarrow T_C &= 25ql/24 \\ \rightarrow T_D &= -23ql/24\end{aligned}$$

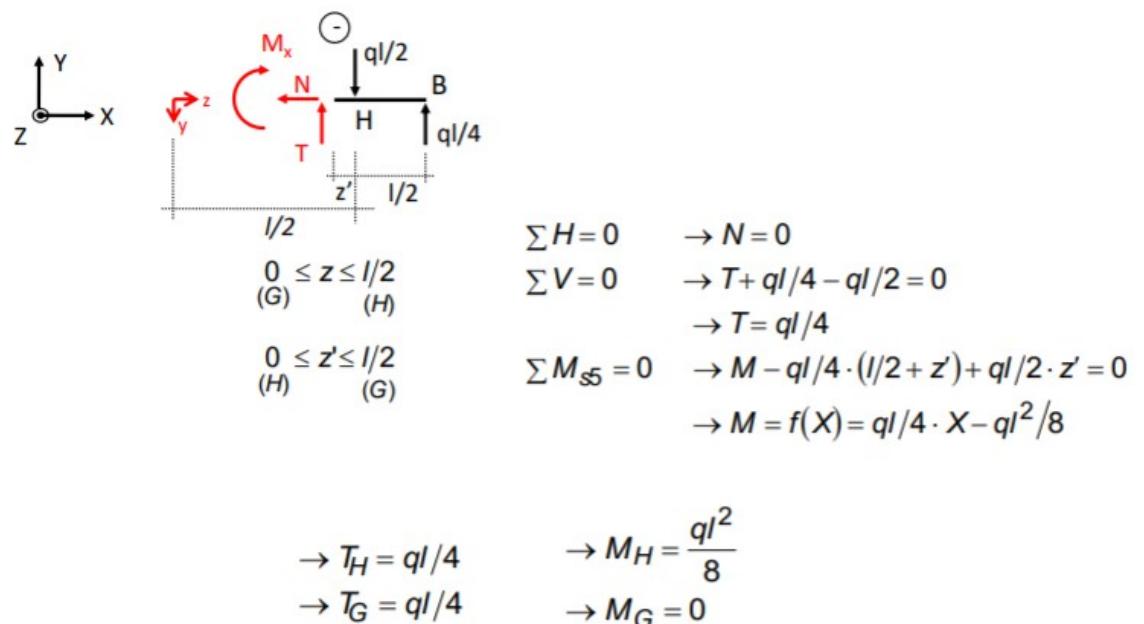
$$\begin{aligned}\sum H &= 0 \rightarrow N = 0 \\ \sum V &= 0 \rightarrow T - \frac{ql}{2} - \frac{15ql}{8} + ql + \frac{ql}{3} + qz = 0 \\ &\rightarrow T = -qz + 25ql/24 \\ \sum M_{S3} &= 0 \rightarrow M - \frac{ql}{2} \cdot \left(\frac{4l}{3} + z\right) - \frac{15ql}{8} \cdot z + \\ &+ ql \cdot \left(\frac{5l}{6} + z\right) + \frac{ql}{3} \cdot \left(\frac{l}{6} + z\right) + \frac{qz^2}{2} = 0 \\ &\rightarrow M = f(z) = -\frac{qz^2}{2} + \frac{25ql}{24} \cdot z - \frac{2ql^2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow M_C &= -\frac{2ql^2}{9} \\ \rightarrow M_D &= -\frac{5ql^2}{36} \\ \rightarrow \frac{dM}{dz} &= -qz + \frac{25ql}{24} \\ \rightarrow \frac{dM}{dz} &= 0 \rightarrow z = \frac{25}{24}l \rightarrow M\left(z = \frac{25}{24}l\right) = \frac{41}{128}ql^2\end{aligned}$$

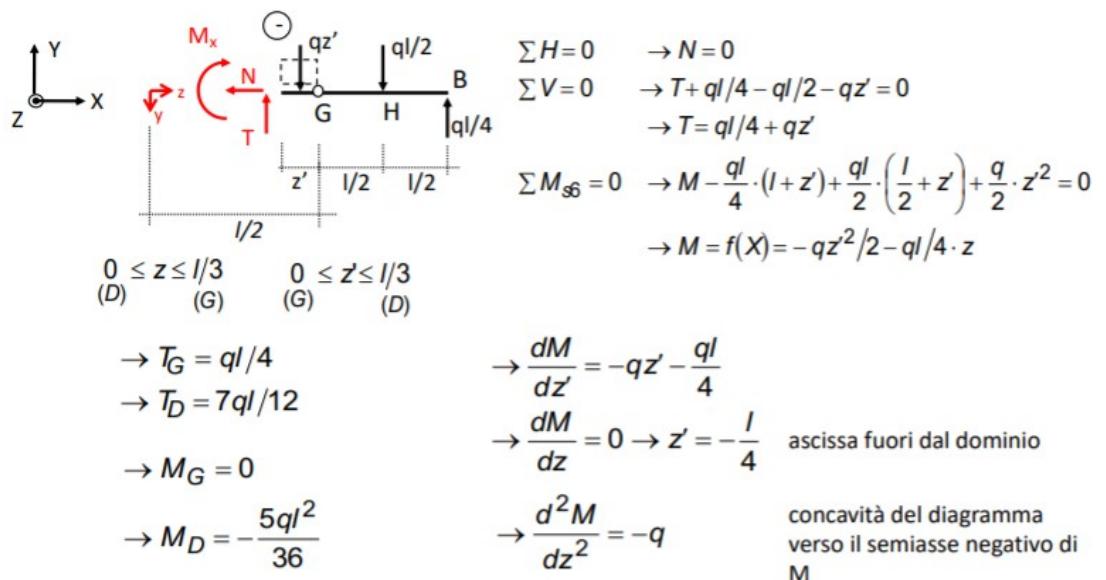
Esempio slide confronto:

Sezione S<sub>4</sub>

Sezione S

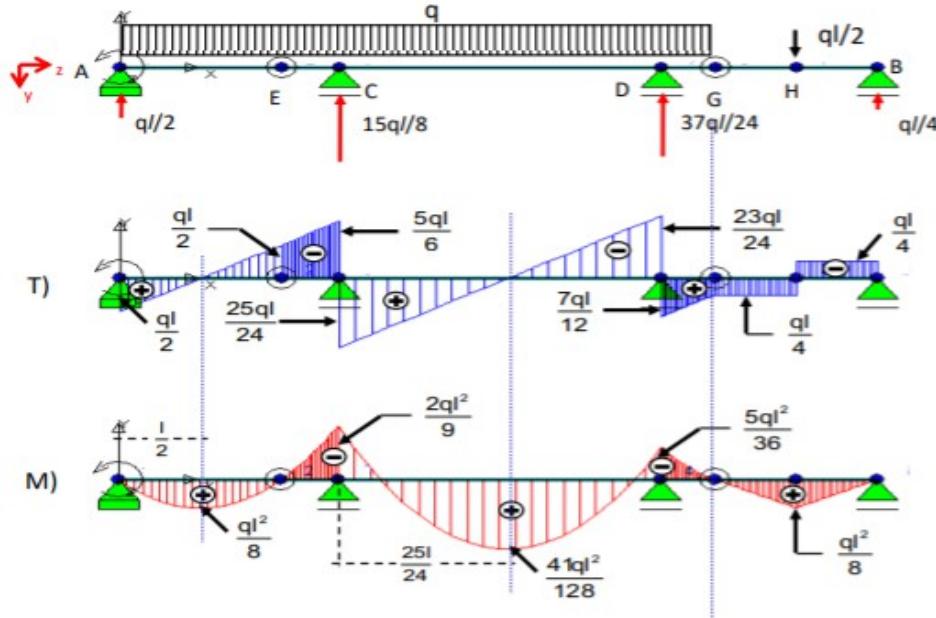
Sezione S<sub>6</sub>

Tracciamento dei diagrammi di sollecitazione



## OSSERVAZIONI

- Il diagramma di taglio varia linearmente nei tratti di trave in cui il carico è distribuito, mentre si mantiene costante nei tratti non gravati da carico distribuito.
- Il diagramma di momento varia con legge parabolica nei tratti gravati da carico distribuito, con legge lineare negli altri tratti.
- In corrispondenza dei punti in cui il taglio si annulla, il momento presenta un massimo relativo.
- Il momento è nullo in corrispondenza delle cerniere interne.



Momento flettente nullo in E e G (abbiamo collocato lì le cerniere interne) sgraviamo le sezioni dal momento flettente

Seconda implicazione che deriva ancora dalla posizione della cerniera interna in campata: a fronte della posizione di carico, avendo imposto che il momento flettente si annulli in questi punti, ed essendo punti in campata, ci rendiamo conto che il momento flettente cambierà segno in campata.

Momento flettente fortissimamente negativo in corrispondenza degli appoggi intermedi

## Obiettivi

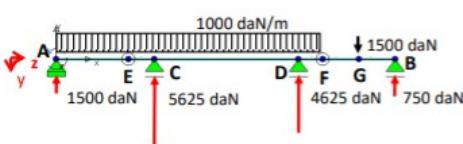
Confrontare la soluzione alla Gerber con soluzione continua e serie di travi in semplice appoggio (A,B,C) per cercare di trarre indicazioni progettuali

Stabilire sotto quali condizioni potremmo progettare una trave continua, e studiarla quantitativamente come una trave Gerber il più possibile simile alla trave continua che abbiamo progettato

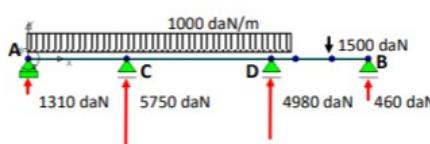
## Confronto trave Gerber-trave continua

Applicazione numerica per la condizione di carico esaminata:  
 $q = 1000 \text{ daN/m}$ ;  $I = 3 \text{ m}$ ;  $F = 1500 \text{ daN}$

## 1) Trave Gerber



## 2) Trave continua



Diagrammi identici per andamento ma valori particolari

Identica per geometria, condizioni divisorie esterne e condizione di carico

Qualitativamente l'andamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione è molto simile. **Differiscono nei punti in cui il momento flettente si annulla**

Nella trave Gerber ho deciso dove posizionare la cerniera, nella trave continua il momento si annulla più in là, e non è più imposto dal progettista ma risulta da condizioni meccaniche (equilibrio e congruenza).

Il momento della trave Gerber nella cerniera si annulla è indipendente dalla condizione di carico. Nella trave continua l'annullamento dipende dagli equilibri di congruenza.

Le lievi traslazioni degli 0 nella funzione momento, non sono trascurabili

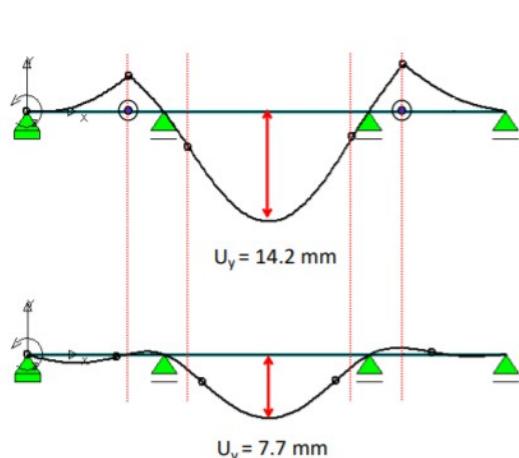
Sia la trave Gerber che quella continua condividono: momento ora positivo ora positivo man mano ci spostiamo verso la sezione della trave.

Se fossimo così bravi da azzeccare la posizione della cerniera in maniera che coincida con il momento nullo (cerniera nella trave Gerber) avremmo costruito trave Gerber per lo meno dal punto di vista statico.

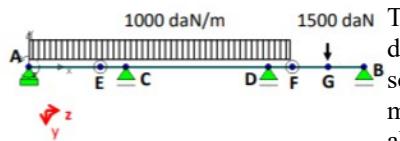
**La trave Gerber sembra essere un buon candidato ad emulare una trave continua.**

## Casi di cedimento

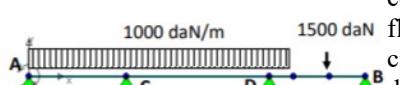
Spostamenti - Trave in c.a. – sezione 20x30 cm



1) Trave Gerber



2) Trave continua

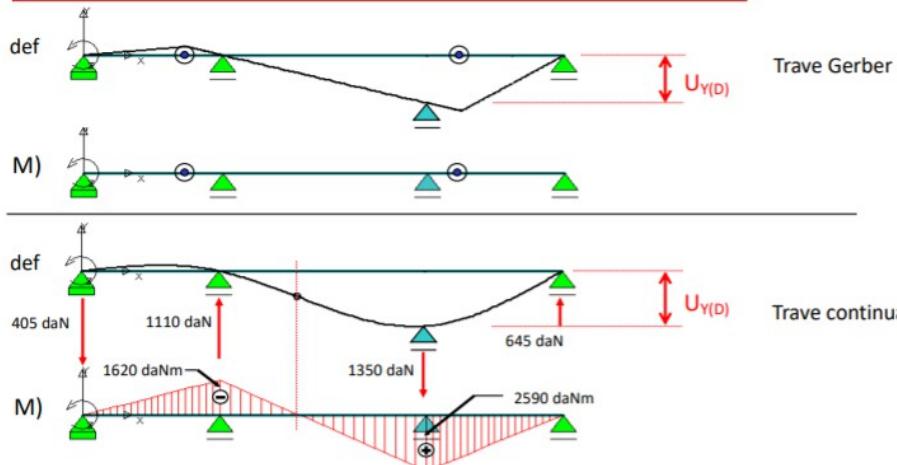


**Trave Gerber:** abbassamento massimo in mezzeria, il doppio della trave continua perché le cerniere interne sono vicini che non consentono traslazioni relativi, ma consentono rotazioni relative che implicano abbassamenti sempre maggiori. Cuspidi in corrispondenza cerniere interne

**La trave continua** non presenta cuspidi, ma curvatura continua, in corrispondenza degli 0 c'è un punto di flesso per definizione. Assenza cuspidi fa sì che non ci sia componente di rotazione che riduce deformazione

Altro caso per cedimento vincolare

Applicazione numerica: cedimento vincolare in D -  $U_{Y(D)} = 2.5 \text{ cm}$  Trave in c.a. – sezione 20x30 cm



Le due travi sono soggette a particolare azione insidiosa: azioni indirette (che non sono esprimibili da una forza o carico concentrato, ma dal fatto che un vincolo esterno si sposta).

**Trave Gerber:** quando il vincolo esterno si abbassa, per un momento possiamo figurarci che il vincolo non ci sia più, quindi diventa labile - **cinematismo**. Sotto l'effetto di cedimento vincolare, una struttura isostatica conosce cinematismo, senza deformarsi. La trave perde il suo asse rettilineo.

**Trave continua:** struttura iperstatica, rimane una volta meno iperstatica

Abbassamento vincolo trascina con sé la trave che continua ad essere soggetta all'equilibrio

Implica variazione curvatura

Cedimento vincolare induce a **momento flettente**

Vincolo reale: esempio calcestruzzo armato

Cerniera interna trave Gerber in calcestruzzo (chiamata **unione a mezzo legno** dai falegnami)

Problema durabilità dell'opera

In corrispondenza delle **selle Gerber** il calcestruzzo non è più in continuità, ma presenta una lama d'aria (**giunto**) via preferenziale in cui il calcestruzzo viene attaccato dagli agenti atmosferici.

Coperti da apparecchi in acciaio

Necessita di manutenzione, oppure non si progetta come Gerber ma come trave continua.

## TRAVE GERBER / TRAVE CONTINUA SINTESI DELLE DIFFERENZE

	Calcolo	Punti con $M=0$	Abbassamenti in campata	Cedimenti vincolari	Problemi costruttivi e di durabilità
<b>Trave Gerber</b>	Semplice (isostaticità)	Determinati a priori	Maggiori	Non producono sollecitazioni ma solo spostamenti	Le cerniere interne sono punti singolari possibili fonti di inconvenienti
<b>Trave continua</b>	Più complesso (iperstaticità)	Dipendenti dal carico	Minori	Producono sollecitazioni e spostamenti	Assenza di punti singolari

Aspetti analizzati

Semplicità o difficoltà di calcolo con la quale è possibile determinare i diagrammi di carico e le caratteristiche di sollecitazione.

Determinazione del momento flettente

Sensibilità dello schema strutturale rispetto ai cedimenti vincolari delle caratteristiche di sollecitazione

Risposta strutturale alle condizioni ambientali: capacità di una struttura di risultare isostatica/iperstatica/labile, in riferimento alle cerniere interne (punti singolari che possono ammalorarsi).

### Analisi trave gerber

Valutare come la trave Gerber non sia solo un'**alternativa di progetto** alla trave continua, ma può anche essere un'**alternativa modellistica** alla trave continua.

Nell'impossibilità di valutarne quantitativamente il momento meccanico, uso la trave Gerber quale modello semplificato per studiare in termini di struttura isostatica la struttura che progetterò come isostatica.

Capire in quali termini potremmo progettare una trave continua, e in prima approssimazione restituirla come trave Gerber, o il più possibile simile ad essa.

### Analisi comparata tra la trave Gerber e una successione di travi in semplice appoggio

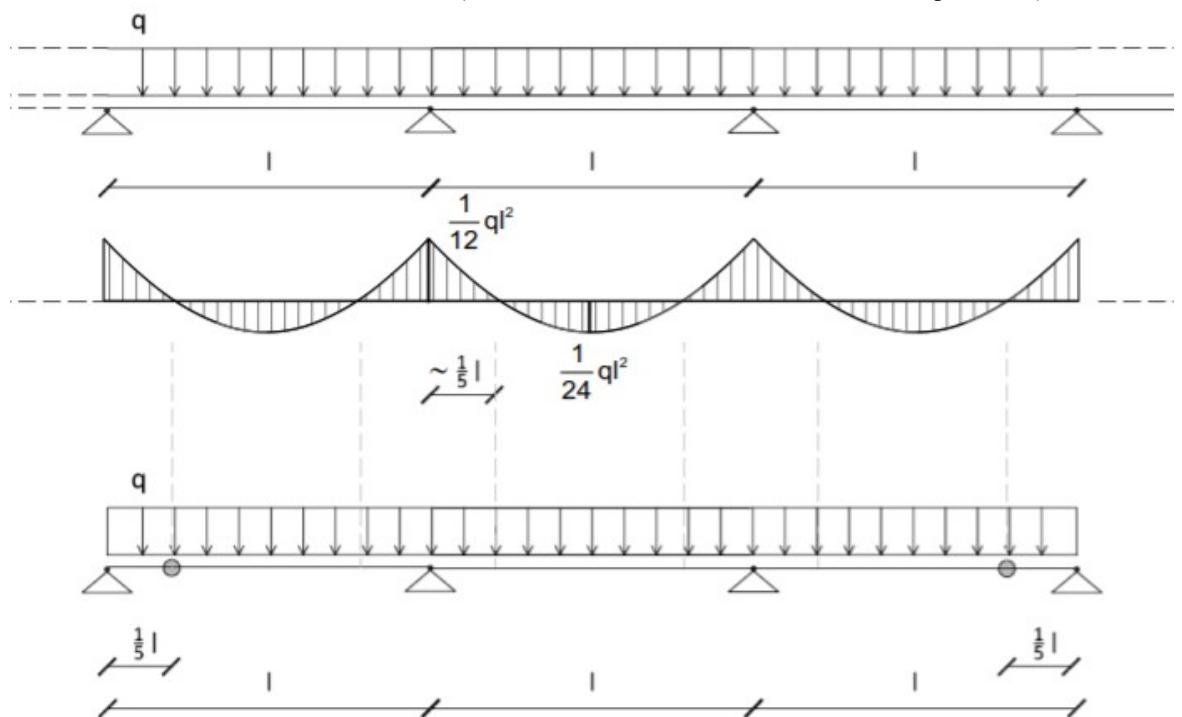
Equivalenza dei modelli

Da un punto di vista statico: dell'equivalenza in termini di reazioni vincolari e caratteristiche di sollecitazione, è possibile formulare un **modello equivalente** (sotto particolari ipotesi).

Immaginiamo di voler progettare trave continua che risponda alle **4 ipotesi**

IPOTESI

1. che la trave continua sia **infinitamente lunga** (composta da n campate, dove n è infinito)
2. che queste infinite campate abbiano la **medesima luce** ( $l$ )
3. che queste campate siano soggette al **medesimo carico** (uniformemente distribuito)
4. che la **sezione della trave sia costante**, (in virtù del fatto che la trave sia continua e iperstatica)



Alternanza del momento positivo in campata e negativo in appoggio

Il momento negativo in appoggio risulta il doppio del momento positivo in campata.

Momenti in 0, collocati ad una distanza rispetto agli appoggi intermedi di circa  $1/5l$

Se volessimo immaginare una trave Gerber che sia perfettamente equivalente in termini di diagramma del momento flettente, sarebbe sufficiente costruire uno schema statico che abbia le stesse caratteristiche della trave continua, ma inserendo le  $n-1$  cerniere, (rispettando le regole di Gerber) ma con posizione a piacere (non avendo limiti sulla posizione).

Esattamente nelle sezioni che corrispondono agli 0 del momento flettente nella trave continua avremo formulato una trave Gerber equivalente alla trave continua in termini di momento flettente.

Se conosciamo quale è l'obiettivo a cui vogliamo tendere alla trave Gerber (che sia equivalente alla trave continua nel momento flettente) posso posizionare le cerniere interne esattamente dove il momento flettente si annulla nella trave continua.

L'equivalenza è soddisfatta per qualunque condizione di carico?

No, il carico deve essere omogeneo e continuo.

Gli zeri del momento flettente nella trave continua dipendono dall'equilibrio e dalla congruenza.  
Nella trave Gerber, il momento flettente è indipendente.

Dal punto di vista della pratica progettuale quali sono le ipotesi più difficili da rispettare?

“Trave infinitamente lunga” → perché avremo sicuramente delle campate di estremità.

“Tutte le campate della medesima lunghezza” → non sempre è così, spesso si hanno esigenze diverse.

Come dobbiamo comportarci?

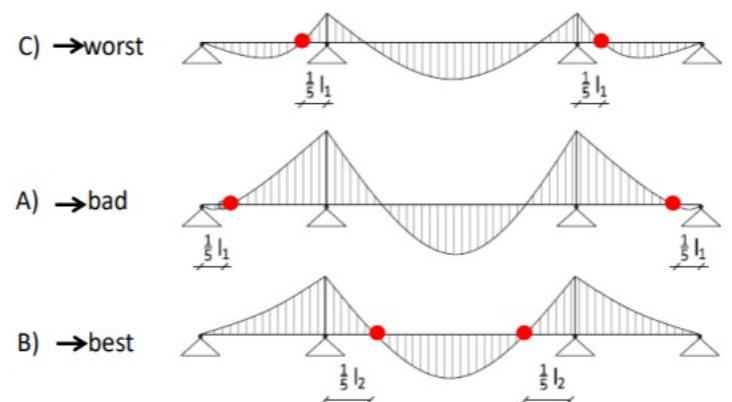
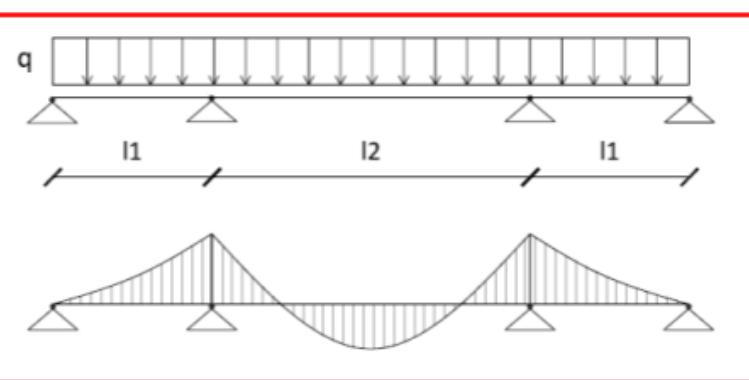
Bisogna cercare criteri di equivalenza rilassando/negando le prime due ipotesi

Diverse travi Gerber → tutte rispondono ai vincoli che Gerber ci dà

Le inseriamo usando il criterio per le travi infinitamente lunghe, dispongo le cerniere ad una distanza pari a 1/5 della luce ( $l_1$ ) della campata in cui la vado a collocare.

Dobbiamo attenderci che non riusciremo a realizzare la perfetta analogia tra la trave continua e la Gerber, perché sto utilizzando un criterio “vecchio” ad una nuova condizione di progetto (solo più due ipotesi).

Confrontare i tre diagrammi con il diagramma del momento flettente della trave continua, e cercare quale si avvicina di più ad essa.



**Caso C)** Il momento flettente delle campate di estremità non ha niente a che vedere con quello della trave continua. Ha un comportamento meccanico differente nelle campate di estremità: è positivo nella maggior parte della lunghezza della campata fino alla cerniera che ho usato per forzare il momento nullo.

**Caso A)** Cerniere interne alle campate di estremità

In questo caso la maggior parte della campata laterale è soggetta a momento flettente negativo, ma vi è comunque una frazione soggetta a momento flettente positivo.

**Caso B)** Se collichiamo le cerniere interne nella campata centrale, da un punto di vista almeno qualitativo, è molto simile alla trave continua.

Momento flettente negativo nelle campate di estremità e alternanza di momento positivo e negativo nella campata centrale con due zeri.

Gli zeri del momento nella campata centrale della trave continua, saranno identici alla posizione in cui ho collocato la cerniera interna della Gerber? No

Non possiamo attenderci che usando il criterio di 1/5 della luce, riusciremo sempre a definire lo schema isostatico che riflette perfettamente il problema progettuale iperstatico.

Ma in primissima approssimazione, una delle tre soluzioni ottenute con il criterio “vecchio” si avvicina qualitativamente al diagramma del momento flettente della trave continua. → **CASO B**

#### Accorgimenti

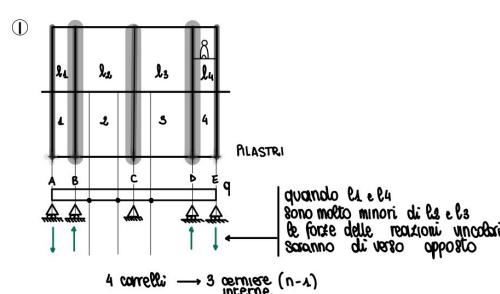
- Per trasformare la trave Gerber utilizzando la regola 1/5 della luce, è necessario posizionare le cerniere interne **il più possibile lontano dalle campate esterne**.

Perché dobbiamo stare lontani dalle campate dei estremità? Perché per definizione sono più lontane dalle ipotesi (trave infinitamente lunga, esclude le campate di estremità).

- Evitare anche le **campate con luci molto più piccole della media** di quelle continue (non rispetta ipotesi delle campate di egual luce)

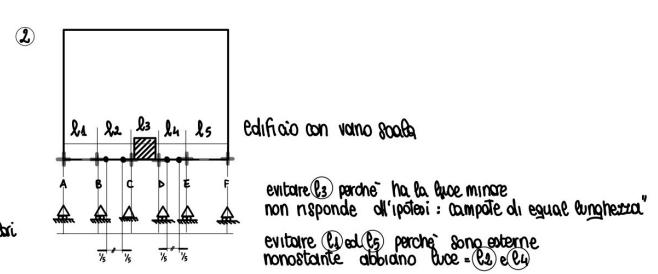
#### Problema progettuale 1

Edificio con balconi sulle testate



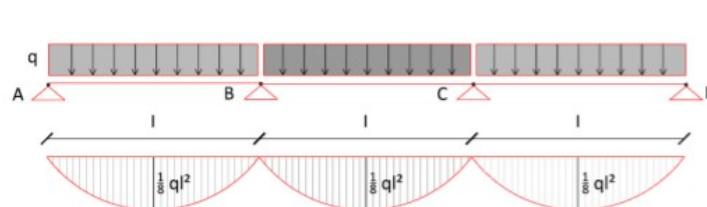
#### Problema progettuale 2

Edificio con vano scala



### Comparare la trave Gerber e N travi in semplice appoggio giustapposte

#### TRAVI SINGOLE IN SEMPLICE APPOGGIO (s.a.)



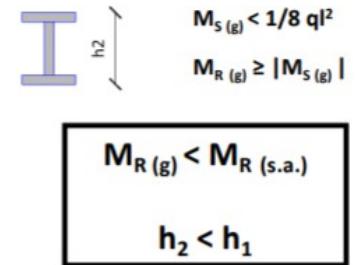
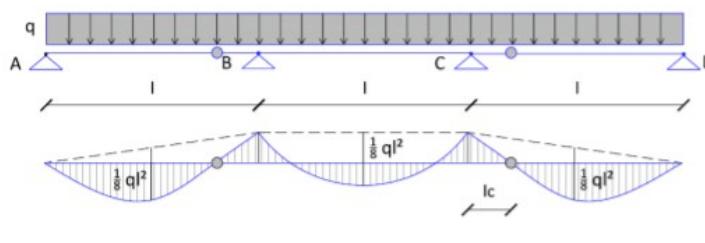
#### PREDIMENTONAMENTO

$$M_R \geq |M_s|$$

$$M_s(s.a.) = 1/8 ql^2$$

$$M_R(s.a.) \geq 1/8 ql^2$$

#### TRAVE GERBER (g)

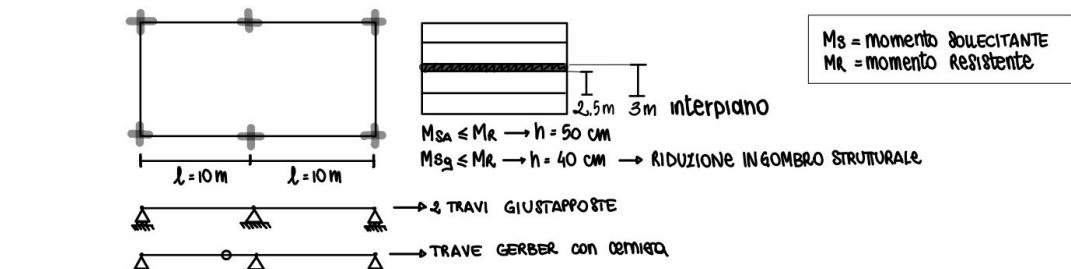


Trave a tre campate con cerniere interne in corrispondenza dei vincoli B e C

Nella trave Gerber le cerniere interne non corrispondono più ai vincoli intermedi B e C ma si trovano ad una distanza (lc) da B e C.

Il diagramma delle travi in semplice appoggio e il diagramma del momento flettente è sempre positivo (sbilanciato nel semipiano positivo).

Il diagramma della trave Gerber è bilanciato, in parte nel semipiano positivo e in parte in quello negativo. Può essere immaginato come un diagramma delle travi giustapposte, in corrispondenza di B, se l'avessimo



“tirato su”.

La **sollecitazione media delle sezioni** nella trave Gerber è minore rispetto alla sollecitazione media delle sezioni delle travi in semplice appoggio.

La media dei valori del momento nelle travi giustapposte è a metà circa del diagramma.

Nella trave Gerber, invece, la media dei valori è vicina allo 0, perché i valori negativi e positivi si compensano.

Nelle travi in semplice appoggio la **sezione** che lavora di più è quella di mezzeria, mentre in corrispondenza di tutti gli appoggi è “rilassata”.

Nella trave Gerber le sezioni tra di loro sono più “solidali”, ognuna fa qualcosa.

Nelle travi giustapposte, il massimo **momento sollecitante** è  $1/8ql^2$

Nella trave Gerber il massimo modulo del momento sollecitante sarà minore  $1/8ql^2$  e sarà distribuito in campata, in corrispondenza dei valori intermedi.

L'**altezza** della sezione trasversale delle travi giustapposte, è fatta in modo che dia luogo ad un momento resistente che sia maggiore del momento sollecitante massimo nel suo modulo.

Per le travi giustapposte adotto altezza h grande (chiamata ad esprimere un momento resistente maggiore del momento massimo sollecitante grande).

Diminuendo il modulo del momento sollecitante, potrà diminuire il momento resistente ed anche l'altezza della sezione trasversale della trave. (Vantaggio dal punto di vista dell'architetto)

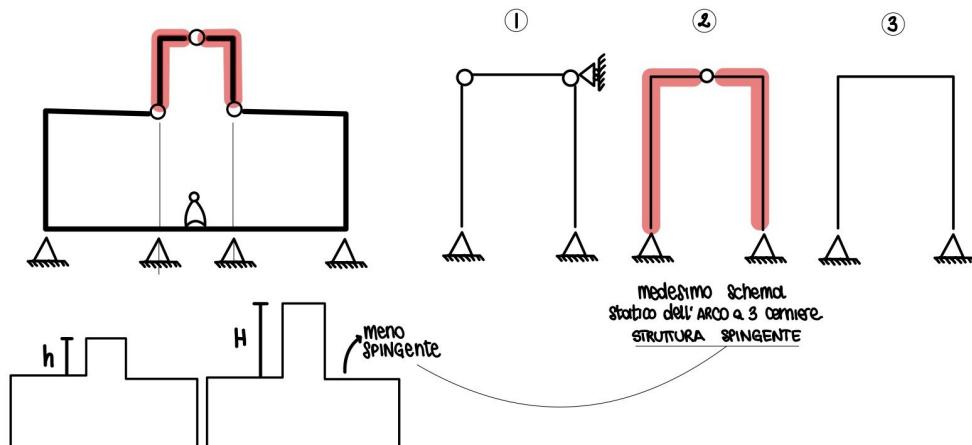
## PORTALI E TELAI

**Problema progettuale** – Galleria commerciale

Obiettivo:

Analizzare un'altra tipologia di strutture che può essere letta come sistVenant, non riferito a travi che abbiano la direttrice allineata (Gerber, continue, giustapposte) ma direttive che non giacciono sulla stessa retta, a realizzare un insieme costituito da **due ritti e un traverso**.

Ritti assi verticali e trasversale asse orizzontale



**Caso 1: schema strutturale trilitico** (i due ritti e il traverso sono tre solidi distinti e articolati da cerniere interne collocate in corrispondenza dei gomiti) - **schema labile**, reso isostatico aggiungendo un carrello in corrispondenza di uno dei gomiti, da intendere come vincolo ideale equivalente che garantisce formalmente l'isostaticità.

**Caso 2: portale a tre cerniere**  
Numero cerniere interne ridotto ad 1  
Cerniera interna collocata nel punto di sezione della mezzeria del traverso (può anche essere messo in corrispondenza di uno dei gomiti)

**Caso 3: telaio**  
Eliminazione della cerniera interna - struttura 1 volta iperstatica che realizza la piena monoliticità dei tre elementi strutturali denominati ritti e traversi.

Ci proponiamo di confrontare fra di loro in maniera sistematica, almeno due delle alternative progettuali  
**2) Portale a tre cerniere:** siamo in grado di studiarne l'equilibrio e determinarne reazioni vincolari esterne e interne caratteristiche sollecitazione che compongono le due travi.  
**3) Il telaio** è equivalente per geometria ma sprovvisto di cerniera interna (la soluzione sarà già data)

### Portale a 3 cerniere

Geometria definita con un traverso e due ritti alti  $h$

Cerniera interna nella mezzeria del traverso

Condizione di carico uniformemente distribuito  $q$  lungo tutto il traverso

Osservazione: presenta il medesimo schema strutturale dell'arco a 3 cerniere → caratteristiche **struttura spingente** (a fronte di carichi verticali, i vincoli esprimono forze orizzontali).

Reazioni vincolari orizzontali inversamente proporzionali alla monta, (in questo caso all'altezza del portale) La **spinta orizzontale** dell'arco a tre cerniere non dipende dalla forma dei semi archi ma dal **rapporto monta-luce**

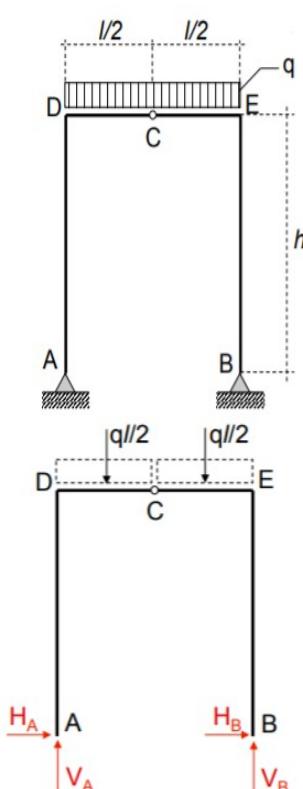
In virtù della gerarchia dei tre elementi strutturali, possiamo scomporli

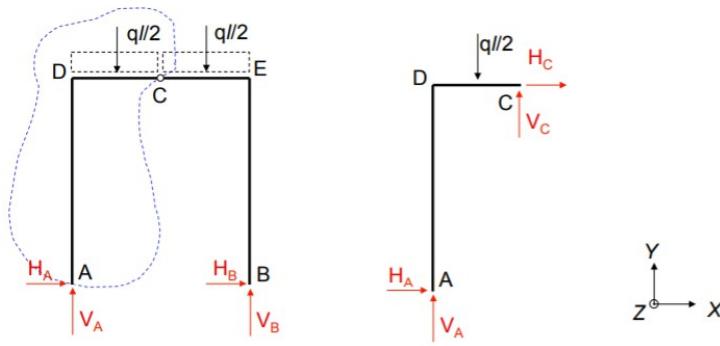
Calcolo delle reazioni vincolari  
Equazioni di equilibrio

$$1) \sum H = 0 \rightarrow H_A + H_B = 0 \quad \text{dalla eq. 1} \rightarrow H_A = -H_B$$

$$2) \sum V = 0 \rightarrow V_A + V_B - \frac{q}{2} - \frac{q}{2} = 0$$

$$3) \sum M_A = 0 \rightarrow V_B \cdot 1 - \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{q}{2} \cdot \frac{3}{4} = 0$$





Linea di distacco

Equazione ausiliaria

$$\sum M_C = 0 \rightarrow H_A \cdot h + \frac{qI}{2} \cdot \frac{l}{4} - \frac{qI}{2} \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad H_A = \frac{qI^2}{8h}$$

Dall'eq. 3) si ricava

$$V_B = \frac{qI}{2}$$

Dall'eq. 2) si ricava

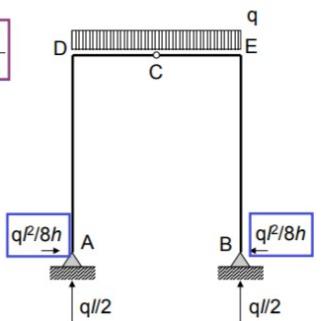
$$V_A = \frac{qI}{2}$$

Dall'eq. 1) si ricava

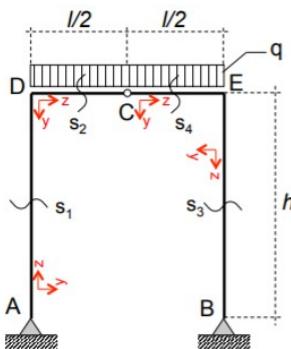
$$H_B = -\frac{qI^2}{8h}$$

N.B. Il valore delle reazioni orizzontali:

- diminuisce al crescere del valore di  $h$ ;
- aumenta al crescere del valore di  $l$ ;



## 2. Calcolo delle Caratteristiche di Sollecitazione

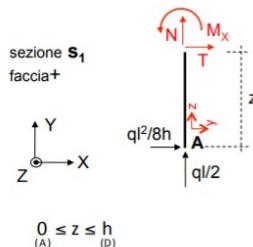


1) Individuazione di un sistema di riferimento locale per ogni tratto di trave compreso tra 2 sezioni singolari.



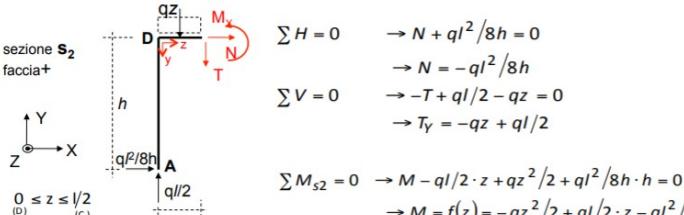
2) Individuazione di una generica sezione  $s_i$  per ogni tratto di trave compreso tra due sezioni singolari.

## Sezione 1



$$\begin{aligned} \sum H &= 0 \rightarrow T + qI^2/8h = 0 \\ &\rightarrow T = -qI^2/8h \\ \sum V &= 0 \rightarrow N + qI/2 = 0 \\ &\rightarrow N_Y = -qI/2 \\ \sum M_{s1} &= 0 \rightarrow M + qI^2/8h \cdot z = 0 \\ &\rightarrow M = f(z) = -qI^2/8h \cdot z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow M_A &= 0 \\ \rightarrow M_D &= -qI^2/8h \end{aligned}$$

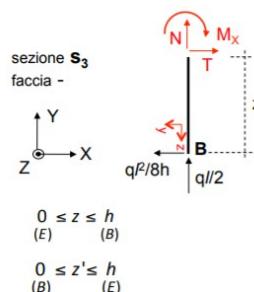


$$\begin{aligned} \sum H &= 0 \rightarrow N + qI^2/8h = 0 \\ &\rightarrow N = -qI^2/8h \\ \sum V &= 0 \rightarrow -T + qI/2 - qz = 0 \\ &\rightarrow T_Y = -qz + qI/2 \\ \sum M_{s2} &= 0 \rightarrow M - qI/2 \cdot z + qz^2/2 + qI^2/8h \cdot h = 0 \\ &\rightarrow M = f(z) = -qz^2/2 + qI/2 \cdot z - qI^2/8h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow T_D &= qI/2 \\ \rightarrow T_C &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow M_D &= -qI^2/8h \\ \rightarrow M_C &= 0 \end{aligned}$$

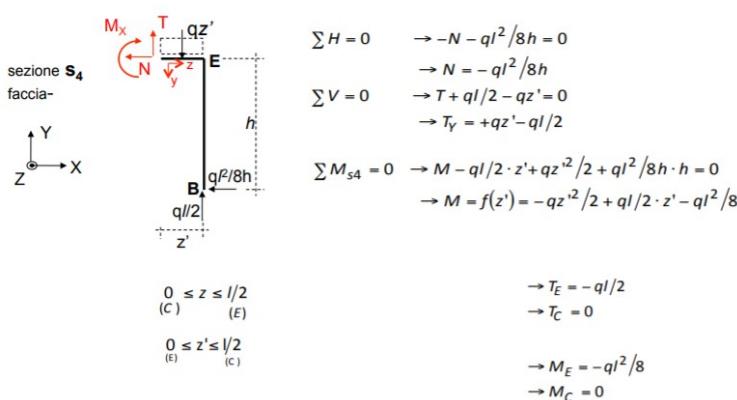
## Sezione 3



$$\begin{aligned} \sum H &= 0 \rightarrow T - qI^2/8h = 0 \\ &\rightarrow T = qI^2/8h \\ \sum V &= 0 \rightarrow N + qI/2 = 0 \\ &\rightarrow N = -qI/2 \\ \sum M_{s3} &= 0 \rightarrow M + qI^2/8h \cdot z' = 0 \\ &\rightarrow M = f(z') = -qI^2/8h \cdot z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow M_E &= -qI^2/8h \\ \rightarrow M_B &= 0 \end{aligned}$$

## Sezione 4



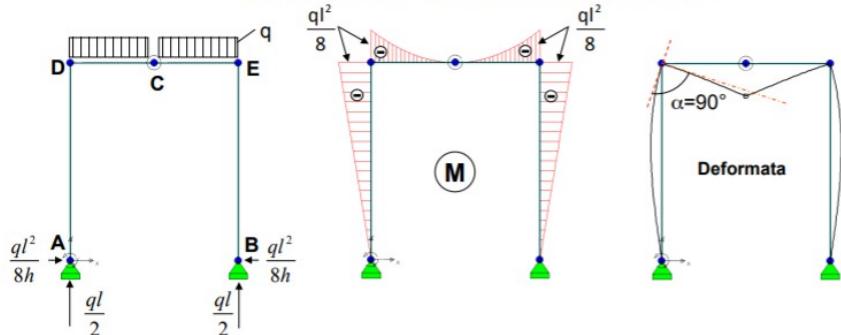
$$\begin{aligned} \sum H &= 0 \rightarrow -N - qI^2/8h = 0 \\ &\rightarrow N = -qI^2/8h \\ \sum V &= 0 \rightarrow T + qI/2 - qz' = 0 \\ &\rightarrow T_Y = +qz' - qI/2 \\ \sum M_{s4} &= 0 \rightarrow M - qI/2 \cdot z' + qz'^2/2 + qI^2/8h \cdot h = 0 \\ &\rightarrow M = f(z') = -qz'^2/2 + qI/2 \cdot z' - qI^2/8h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow T_E &= -qI/2 \\ \rightarrow T_C &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow M_E &= -qI^2/8h \\ \rightarrow M_C &= 0 \end{aligned}$$

## Portale a 3 cerniere

### 4. Tracciamento della deformata qualitativa



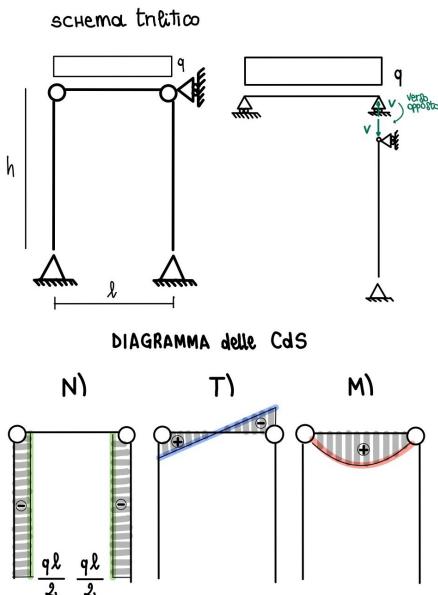
- A. cerniera  $\rightarrow U_x = U_y = 0$
- B. cerniera  $\rightarrow U_x = U_y = 0$
- C. cerniera interna  $\rightarrow$  cuspide
- D. Assenza di articolazioni  $\rightarrow \alpha$  costante
- E. Assenza di articolazioni  $\rightarrow \alpha$  costante

- tratto AD:  $M < 0 \rightarrow$  concavità verso  $y^+$
- tratto BE:  $M < 0 \rightarrow$  concavità verso  $y^+$
- tratto DC:  $M < 0 \rightarrow$  concavità verso  $y^+$
- tratto CE:  $M < 0 \rightarrow$  concavità verso  $y^+$

Ritti parecchio inflessi  
Il trasverso risulta debolmente compresso  
Fortemente tagliato, e fortemente inflesso

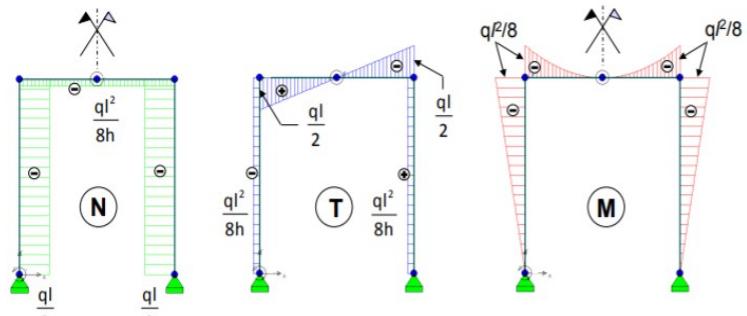
Convenzione non universale dei segni  
N del diagramma delle caratteristiche di sollecitazione del portale a tre cerniere  
Considerato diagramma di N nel semipiano positivo con segno negativo, (contrariamente a quanto siamo abituati a fare).

### Confronto diagrammi dello schema trilitico con quelli del portale



## Portale a 3 cerniere

### 3. Tracciamento dei diagrammi delle CdS



#### N.B. Considerazioni intuitive sulla simmetria strutturale

Nel caso in cui lo schema statico sia simmetrico rispetto ad un asse (simmetria di geometria, di azioni e di vincoli), allora anche la soluzione è simmetrica.

In particolare le reazioni vincolari sono simmetriche, i diagrammi di sforzo normale e momento flettente sono simmetrici e il diagramma di taglio è antimetlico.

#### Momento flettente: due differenze importanti

Nello **schema trilitico** i ritti non sono sollecitati, nel **portale**, invece sono sollecitati man mano che ci avviciniamo al gomito

Cerniera nel punto di mezzeria del trasverso  $\rightarrow$  scelta che obbliga il momento flettente ad annullarsi

Mentre nello **schema trilitico** vi è un unico elemento inflesso e due elementi compresi, (trasverso, inflesso e ritti compresi), nel caso del **portale a tre cerniere**, gli elementi strutturali sono più "solidali"  $\rightarrow$  trasverso e ritti variamente inflessi

Proposta: Se la cerniera l'avessimo messa a 1/4 e 3/4 di l?

Siamo in grado di controllare le sollecitazione lungo il trasverso ed eventualmente equilibrare i momenti positivi e negativi?

#### Portale a 3 cerniere: pre dimensionamento

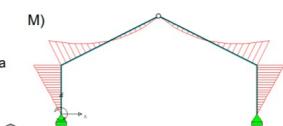


#### Esempio portale a tre cerniere reale

Schema statico di portale a tre cerniere, ma trasverso suborizzontale per seguire le falde

#### Diagramma di momento flettente

Se ci immaginiamo di disegnare il diagramma modulo momento flettente, l'architettura adotta travi a sezione variabile, che ricalca la variabilità del momento sollecitante.



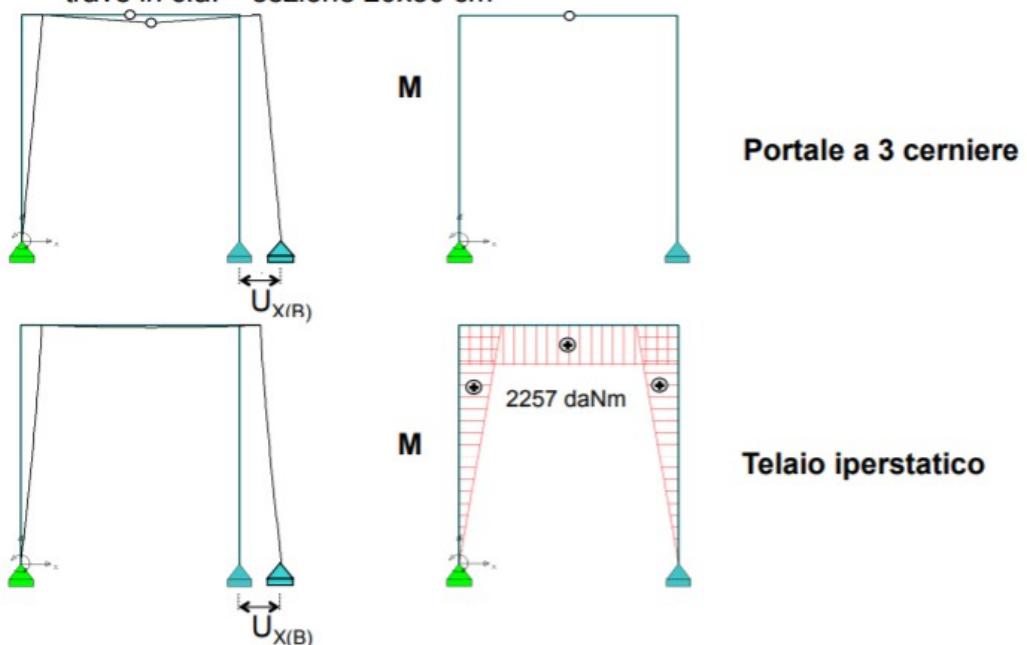
N.B. La variazione d'altezza delle sezioni del portale è coerente con quella del momento flettente.

(Es. Torre Calatrava)

**Confronto Portale a tre cerniere - telaio**

Caratteristiche di sollecitazione a confronto

**Es.2: Applicazione numerica: cedimento vincolare in B –  $U_{X(B)} = 2.5\text{cm}$**   
**trave in c.a. – sezione 20x30 cm**



Per sforzo e taglio abbastanza analoghi

Per momento flettente no

La traslazione del momento flettente rimane tale

Nel telaio, il bilanciamento tra momento flettente negativo e positivo lo otteniamo attraverso la progettazione della rigidezza del trasverso e dei ritti.

**Confronto rigidezza**

Un struttura iperstatica è sempre più rigida di una struttura isostatica, perché non c'è più la cerniera (lascia la possibilità di rotazioni relative, mentre la continuità di ritti e trasversi, impedisce la rotazione relativa).

Se vogliamo progettare una struttura che a parità di condizioni sia più rigida, dovremo scegliere quella iperstatica.

**Caso cedimento portale a tre cerniere e telaio (cedimento vincolare elastico orizzontale)**

Risposta analoga alla trave Gerber → struttura isostatica.

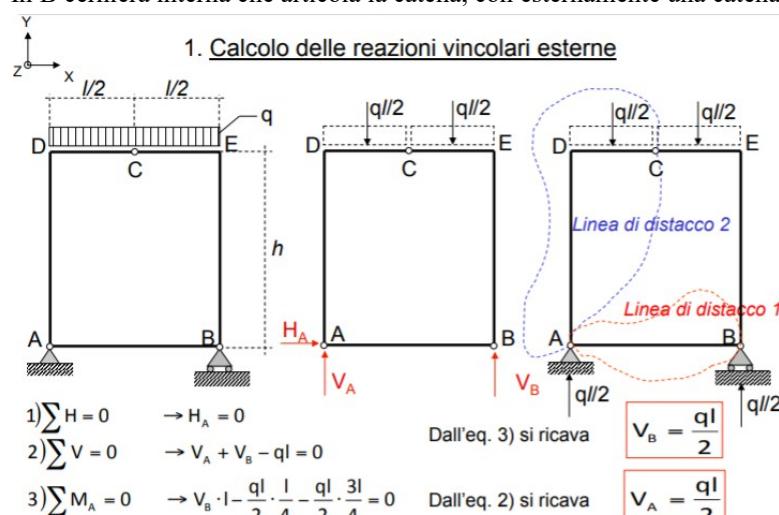
Per un momento diventa labile (cinematismo), ma non ci sarà momento flettente /variazione curvatura delle travi, → non implica sollecitazione.

Nel telaio il cedimento vincolare elastico comporta uno **stato di deformazione**, curvatura degli elementi strutturali

Valore massimo momento flettente che si scontra per cedimento elastico dell'ordine dei 2200daNm

Variante progettuale del portale a tre cerniere**Portale a spinta eliminata (con catena)**

Studiare il comportamento meccanico del portale a tre cerniere con spinta eliminata attraverso la catena In B cerniera interna che articola la catena, con esternamente una catena



Per determinare reazioni vincolari esterni non sono necessarie equazioni ausiliarie perché l'insieme dei corpi trave, 3 in questo caso (2 semiportali e 1 catena) è vincolato da cerniera e carrello → bastano le equazioni di equilibrio.

Dopo aver determinato le reazioni vincolari esterne, determino anche quelle **interne**.

Come mai? Ragione che riguarda il tracciamento delle caratteristiche di sollecitazione)

Figuriamoci, partendo dallo schema iniziale, di identificare le sezioni singolari e quindi le sezioni generiche

### 1.1. Calcolo delle reazioni vincolari interne

#### Linea di distacco 1

Permette di calcolare le reazioni vincolari verticali interne nei nodi A e B



$$\begin{aligned} 1) \sum H &= 0 & \rightarrow H_A + H_B = 0 \\ 2) \sum V &= 0 & \rightarrow V_A + V_B = 0 \\ 3) \sum M_A &= 0 & \rightarrow V_B \cdot l = 0 \end{aligned}$$

Dall'eq. 3) si ricava

$$V_B = 0$$

Dall'eq. 2) si ricava

$$V_A = 0$$

Dall'eq. 1) si ricava

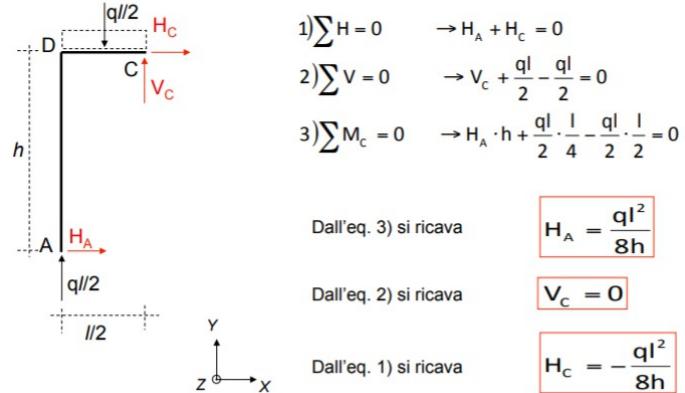
$$H_A = -H_B$$



### 1.2. Calcolo delle reazioni vincolari interne

#### Linea di distacco 2

Permette di calcolare le reazioni vincolari interne nei nodi A e C



$$1) \sum H = 0 \rightarrow H_A + H_C = 0$$

$$2) \sum V = 0 \rightarrow V_C + \frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} = 0$$

$$3) \sum M_C = 0 \rightarrow H_A \cdot h + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Dall'eq. 3) si ricava

$$H_A = \frac{ql^2}{8h}$$

Dall'eq. 2) si ricava

$$V_C = 0$$

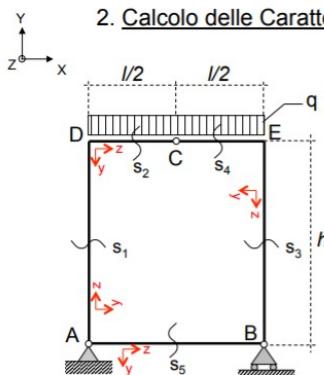
Dall'eq. 1) si ricava

$$H_C = -\frac{ql^2}{8h}$$

Essendo una trave biconnessa, necessariamente la linea di distacco dovrà uscire dalla struttura  
Linea di distacco di S5, passante per la cerniera interna C o passante per il vincolo (cerniera) nel punto A  
Per prepararmi allo studio delle caratteristiche di sollecitazione devo necessariamente determinare le reazioni vincolari interne, oltre a quelle esterne.

### Portale a spinta eliminata

#### 2. Calcolo delle Caratteristiche di Sollecitazione



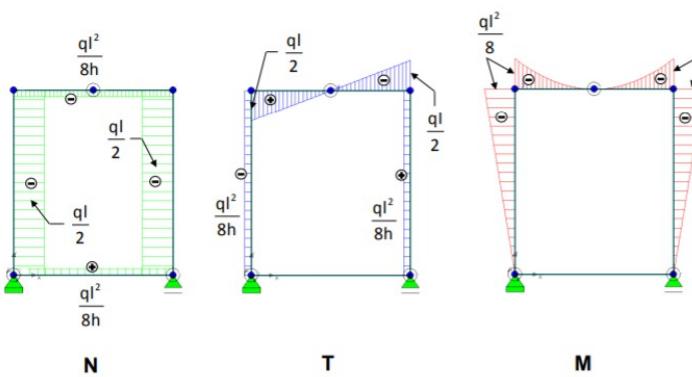
N.B. Si sviluppa solo la sezione S5.

Per le sezioni S1, S2, S3, S4 si procede come nel precedente esercizio.  
→ esercizio per l'allievo

A e B vincoli sia esterni che interni

Le due linee di distacco ci portano a scrivere 6 equazioni (6 incognite)

#### 3. Tracciamento dei diagrammi delle CdS



#### Commento sezione S5

Reazione vincolare del vincolo interno C ( $ql^2/8h$ )

Forza  $ql/2$  applicata in A: reazione vincolare esterna

Quando un vincolo è sia interno che esterno, quando si taglia la linea di distacco si deve fare un "ingrandimento" per capire bene cosa accade all'interno

L'esercizio conferma

La catena impedisce l'allontanamento relativo dei piedi dell'arco  
Risulta essere soggetta a sforzo normale positivo (di trazione)

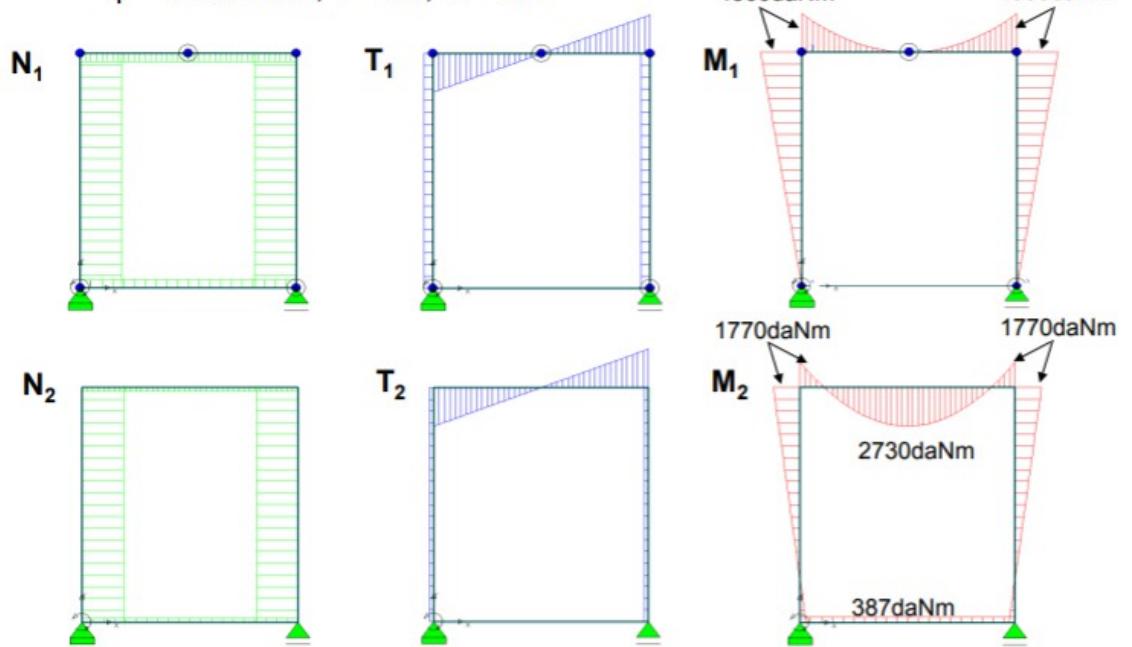
Sforzo normale al modulo, pari alla spinta che viene eliminata,  
(reazioni vincolari del portale quando non era a spinta eliminata)

La catena non è ne tagliata ne inflessa: **elemento puramente teso**  
Conferma dell'intuizione, a cui possiamo attribuire un valore

## Confronto portale a spinta eliminata - telaio

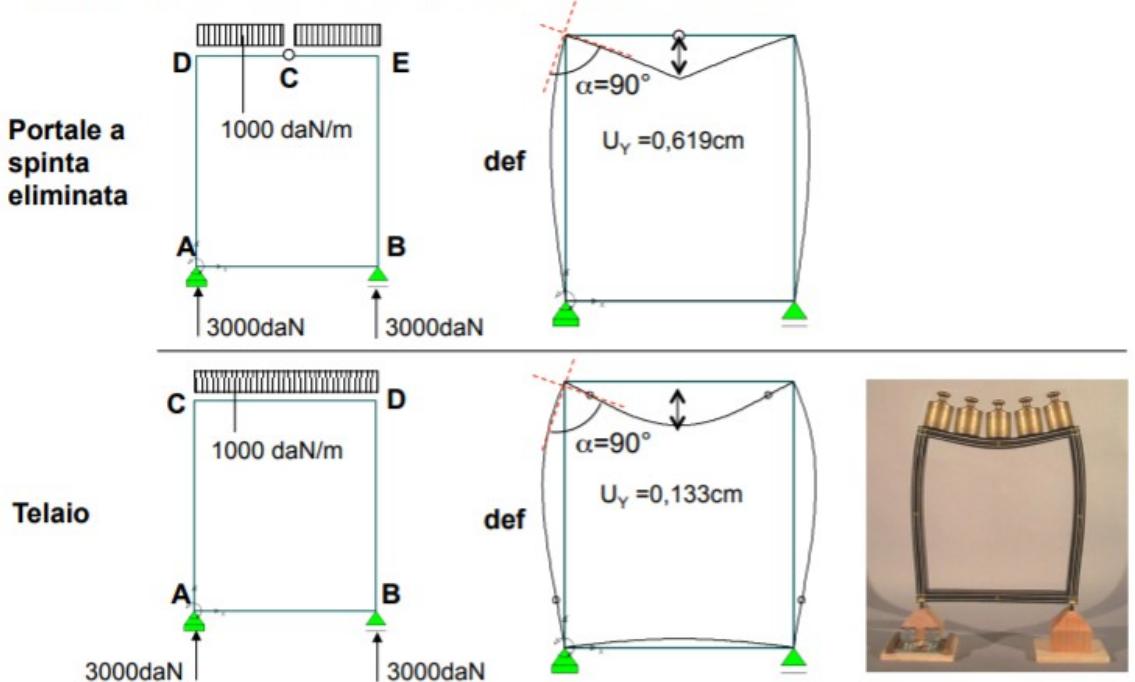
Es.1.1: Applicazione numerica per la condizione di carico esaminata:

$$q = 1000 \text{ daN/m}; l = 6 \text{ m}; h = 7 \text{ m}$$



## Confronto portale a spinta eliminata - telaio

Es.1.2: Spostamenti – Trave in c.a. – sezione 20x30cm



Riassunto concettuale Secondo Modulo

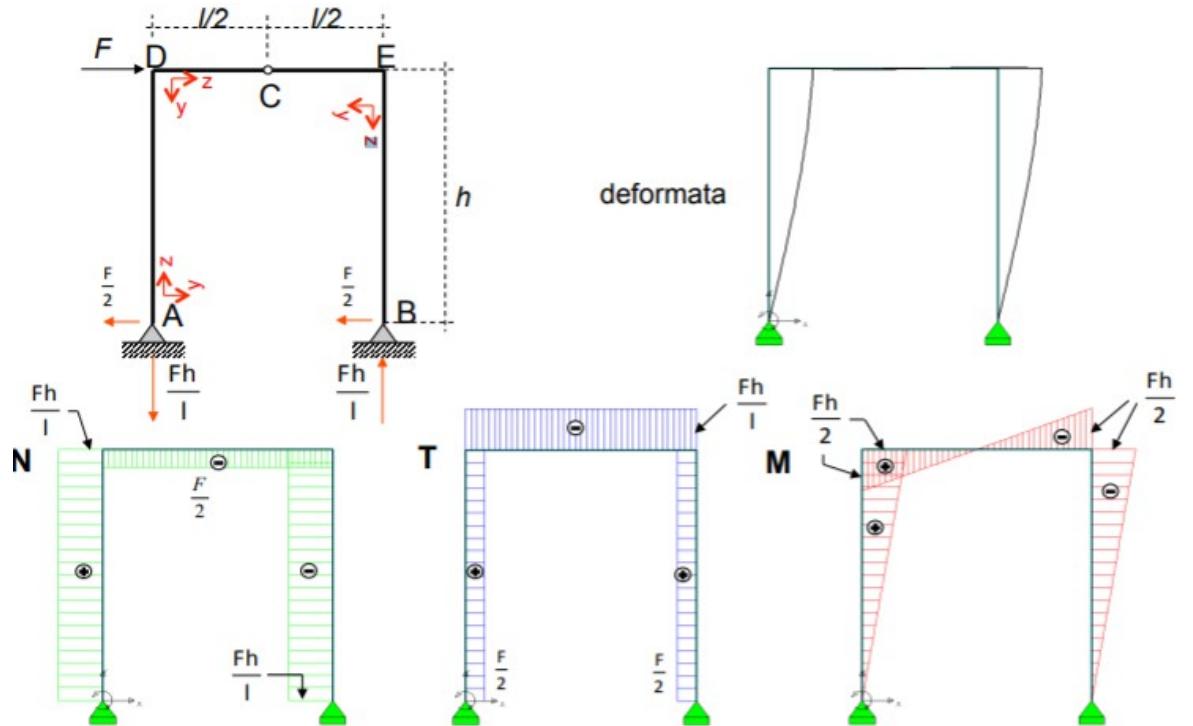
Solido De Saint Venant → sappiamo stabilire il regime di sollecitazione di una trave o un sistema di travi (portale, trave gerber)

Acquisizione dell' strumento di analisi, applicato a due sistemi di travi significativi nell'architettura (trave in semplice appoggio, schema pendolare trilitico, Gerber, e portale a tre cerniere): tipi strutturali che si fondano sulla trave inflessa.

## ESERCIZIO 1

**Portale a tre cerniere** identico per geometria e vincoli

No carico diretto verticalmente, ma soggetto a carico diretto orizzontalmente



## ESERCIZIO 2

Differisce nel punto di applicazione e verso della forza applicata  $F$  orizzontale (in E e in B)Non più portale a tre cerniere, ma a **spinta eliminata**

## Esercizi per l'allievo con soluzione (2)

