Riass - Matematica

Istituzioni di matematiche (Politecnico di Torino)

Capitolo I

Numeri complessi-Un numero complesso è un numero formato da una parte reale e da una parte immaginaria sommate tra loro in forma a+ib dove a e b sono due numeri reali(parte reale del numero complesso e coefficiente dell'immaginario) **i** è l'unita immaginaria, definita dalla relazione i^2= -1.

- **Coniugato-** z=a-bi
- **Norma di z**
  |z|= $\sqrt{a^2+b^2}$

⑱ Teorema fondamentale dell'algebra-Ogni polinomio complesso di grado>=1 ammette almeno uno zero nel campo complesso.

Teorema di Ruffini- permette di dividere velocemente un qualunque polinomio per un binomio di primo grado della forma x-a.Se x1 è uno zero di p(x) allora il binomio (x-x1) divide p(x): è cioè possibile fattorizzare quest'ultimo nella forma: p(x)=(x-x1)p1(x)

⑱ Teorema fondamentale dell'algebra II versione-Ogni polinomio complesso di grado n>=1 ammette n zeri(non necessariamente distinti) nel campo complesso.

Capitolo II

⑱ *Vettori numerici*

Vettore numerico ad n componenti una n-pla ordinata di numeri reali, dette sue componenti.
Vettore nullo 0- tutti i componenti uguali a 0.
Operazioni: somma(commutativa ,associativa);prodotto di un vettore per un numero reale(associativa,distributiva per somma di scalari,distributiva per somma di vettori).
Prodotto scalare(commutativa,distributiva per somma di vettori,associativa rispetto alla moltiplicazione per uno scalare)-sianno i vettori v e w, il prodotto scalare è (v,w)
Esempio: v=(4,5,-2) w=(-1,0,4) (v,w)=4*(-1)+5*0+(-2)*4=-12
Modulo di un vettore|v|- v=(3,2,-6), il modulo è $\sqrt{3^2+2^2+-6^2}$
Normalizzazione-l'operazione di dividere un vettore per il suo modulo,che è uguale ad un vettore di modulo 1.
Vettori ortogonali:due vettori non nulli , il cui prodotto scalare sia 0.
Combinazione lineare:siano assegnati un numero di vettore v1,v2,v3 ed altrementi numeri reali a,b,c, la loro combinazione linearre è il vettore w=v1*a+v2*b+v3*c
Spazio vettoriale- un insieme chiuso per combinazioni lineari.nell'insieme è definita un operazione di cpmbinazione lineare e dunque suno definite due operazioni di somma e prodotto per uno scalare, cmq si combinino linearmente elementi dell'insieme ,si ottiene ancora un elemento dello stesso insieme.
Sottospazio vettoriale-un sottoinsieme di uno spazio vettorialetalle da essere a sua volta uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma tra vettori e di prodotto di un vettore per scalare definite nello spazio di potenza.

Dipendenza lineare:due vettori sono linearmenti dependenti se esiste una loro combinazione lineare che dia il vettore nullo.

- Un vettore è indipendente se e solo se non è 0
- Due vettori sono dipendenti tra loro se e soltanto se sono proporzionali.
- Due vettori ortogonali sono indipendenti tra loro.
- Se tra m vettori sono k<m dipendenti tra loro,allora sono dipendenti tra loro tutti gli m vettori
- Se m vettori sono dipendenti tra loro, uno almeno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.
- Se un vettore è combinazione lineare di altri m,gli m+1 considerati tutti insieme sono dipendenti tra loro.

Basi di uno spazio vettoriale-un sistema di generatori minimali dello spazio,formato da vettori indipendenti tra loro.

- Se B è una base per V ,allora ogni vettore di V può esprimersi in ono ed un dolo modo come combinazione lineare di elementi di B.
- Ogni spazio vettoriale ammette una base.
- Basi diverse per lo stesso spazio vettoriale ,o sono tutte formate da infiniti vettori , o sono costituite dallo stesso numero di vettori.
- In uno spazio vettoriale di dimensione n, presi cmq n vettori indipendenti tra loro essi formano una base.
- Se uno spazio ha dimensioni n, è impossibile trovare in esso più di n vettori indipendenti tra loro.
- In qualunque spazio vettoriale,le coordinate rispetto ad una base del vettore v+w sono somme delle coordinate di v e w , e le coordinate di av sono a volte quelle di v

Capitolo III
Matrici e determinanti

Una ***matrice*** è una tabella ordinata di elementi ad m righe e n colonne. I componenti sono a_{mn}
Se il numero delle righe è diverso da quello delle colonne la matrice è detta **rettangolar**e se no allora è quadrata. Una matrice **quadrata** è **diagonale** se sono nulli tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale. Se in una matrice diagonale, di ordine n, gli elementi non nulli sono tutti uguali ad 1, allora si dice **matrice unitaria** di ordine n.
Una matrice quadrata in cui tutti gli elementi che si trovano al di sotto della diagonale principale sono nulli, si dice matrice **triangolare superiore.**
Una matrice di ordine 1xm è detta **matrice riga** o **vettore riga**. In modo analogo, una matrice di ordine nx1 è detta **matrice colonn**a o **vettore colonna.**
Assegnata una matrice A di ordine $n \times m$, si definisce **trasposta** di A la matrice, indicata con A^T, ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.
Il determinante è un numero associato a ciascuna matrice quadrata, e ne esprime alcune proprietà algebriche e geometriche. E la somma dei prodotti degli elementi di una linea di A, arbitrariamente scelta,per i rispettivi complementi algebrici. Il **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij} è il determinante della matrice ottenuta da A cancellandone la riga e la colonna di a_{ij} , moltiplicato per -1alla i+j. La regola di Sarrus

Proprietà del determinante

- Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto dei suoi elementi principali
- Un determinante con una linea di zeri è zero.
- Moltiplicando per un fattore tutti gli elementi di una linea di una matrice ,il determinante di questa resta moltiplicato per lo stesso fattore.
- Scambiando tra loro due righe o due colonne di una matrice quadrata , il determinante cambia segno.
- Un determinante con due colonne o due righe uguale èzero.
- Un determinante con due colonne o righe proporzionai, è zero.

***Rango di una matrice*-** l'ordine massimo dei suoi minori non nulli.
Una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso rango.
Se la matrice è quadrata di ord n , det=0 se il rango è <n.
Teorema dei minori orlati-Sia B un minore di ord k della matrice, non nullo .Se sono nulli tutti i minori di ord k+1 ottenuti orlando B in tutti i modi possibili, allora sono nulli tutti i minori della matrice di ord k+1 onde la matrice ha ordine k.

⑱ ***Matrice inversa*-**è la matrice che moltiplicata per quella di partenza da la matrice unità. La matrice inversa può essere calcolata solo per matrici quadrate con il determinante diverso da 0.
La matrice inversa è la trasposta della matrice degli aggiunti. La matrice degli aggiunti è quella che alposto di i,j, ha il complemento algebrico di aij diviso per det(A).

- Il determinante non cambia se ad una sua riga o colonna si aggiunge qualunque combinazione lineare delle altre righe o colonne.
- Se il det di una matrice è 0 , le righe e le colonne sono dipendente tra loro.
- Il rango della matrice non cambia se se ne scambiano le linee tra loro, o se ad una linea si aggiunge qualunque combinazione lineare delle altre.
- In ogni matrice , il numero massimo di righe indipandenti tra loro è uguale a quello delle colonne indipendenti tra loro.
- Il rango di una matrice è uguale al numero massimo di linee indipendenti tra loro che essa possiede.

Capitolo IV
I sistemi di equazioni lineari

Un ***sistema lineare*** è un sistema con equazioni di primo grado in più incognite.

L'eliminazione di Gauss-Jordan-

Le soluzioni di un sistema non cambiano se ad una sua qualunque equazione si aggiunge un qualunque multiplo di un'altra…le soluzioni di un sistema non cambiano se ad una sua equazione ne viene sommata , o sottratta, un'altra delle sue.

***Il teorema di Cramer*-**è un procedimento per la risoluzione dei sistemi lineari , e prevede di determinare le soluzioni dei sistemi lineari quadrati (con tante equazioni quante incognite) mediante il calcolo del determinante associato.

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema ammetta una soluzione ed una sola ,è che il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite sia diverso da zero. Se questo è vero,il valore della i-ma incognita è dato dalla frazione avente a denominatore quel determinante e, a numeratore, il determinante che si ottiene da questo sostituendo alla i-ma colonna quella dei termini noti.

⑱ ***Il teorema di Roucé-Capelli*-**è uno strumento molto potente nello studio della risolubilità dei sistemi lineari. E possibile stabilire se un sistema lineare ammette soluzioni ed eventualmente quantificarle attraverso lo studio del rango di due matrici associate al sistema(la matrice completa e la matrice incompleta).   Se la matrice incompleta ha rango uguale al numero delle sue righe, tale è anche il rango della matrice completa.

CNES affinché un sistema lineare in n incognite ammetta soluzioni e che le sue matrice incompleta e completa abbiano lo stesso rango p. Se questo è il caso, il sistema ammette ∞^{n-p} se n=p,una sola

(*Se il sistema è risolubile , le soluzioni si trovano scegliendo , nella matrice incompleta,un minore di ordine p non nullo, e risolvendo poi le p equazioni corrispondenti alle righe scelte scegliendo il minore. Le restanti equazioni si eliminano come sovrabbondanti , mentre le restante incognite si trattano, formalmente ,alla stregua dei termini noti.*)

***Sistemi omogenei*-**sistemi in cui i termini noti delle equazioni che lo definiscono sono tutti nulli. Qualunque sistema omogeneo ammette sempre la **soluzione banale**. Si chiamano **soluzioni proprie** o autosoluzioni d'un sistema omogeneo le sue eventueli soluzioni diverse da quella banale. CNES perché un sistema lineare omogeneo quadrato ammetta autosoluzioni, è che il determinante dei coefficienti sia uguale a zero.

CNES perché un sistema omogeneo ammetta autosoluzioni è che il rango della sua matrice incompleta sia minore del numero delle incognite.

Se la matrice incompleta di un sistema lineare omogeneo con n incognite ha rango p<n, l'insieme delle soluzione forma uno spazio vettoriale di dimensione n-p. Dunque, qualunque combinazione lineare di soluzioni d'un sistema lineare omogeneo è ancora una soluzione dello stesso sistema.

Capitolo V

Le funzioni

Intervalli propri

(a,b)-intervallo aperto , gli estremi esclusi

[a,b]-intervallo chiuso, gli estremi inclusi

Intervalli impropri:

(-∞,a)…

Il **complementare** di un sottoinsieme I è il sottoinsieme di R formato da tutti e soli i reali che non appartengono ad I.

Intorno di x è qualunque sottoinsieme I di R che contenga un intervallo aperto contenente x.(si può muovere da x pure di pochissmo)

Intorno destro [x,a) è intorno sinistro (a,x] }

I=(1,2)-tutti i punti sono interni, 1,2 sono punti di frontiera, il complementare è (-∞,1] U [2, ∞)

I={1,2,3}- I punti di frontiera sono 1,2,3 non ci sono punti interni.

{(1,2) U{5 }}, i punti di frontiera sono 1,2,5, i punti interni sono tutti di (1,2).

Un **sottoinsieme è aperto** se tutti i suoi punti sono interni

X di R è un **punto di accumulazione** per il sottoinsieme I di R se in ogni suo intorno è contenuto almeno un elemento di I distinto da x.   {(1,2) U{5 }} i punti di accumulazione sono [1,2] ,1 di accumulazione destro, 2 sinistro, 5 è un punto isolato.

[2, 8) limitato

[2, ∞) limitato inferiormente

[- ∞, ∞) ilimitato

Funzioni di una o più variabili

Una **funzione** è una corrispondenza che collega gli elementi di due insiemi. Da tutti gli elementi dell'insieme di partenza deve partire una freccia e ogni freccia non può avere più di una punta. Non è possibile che ad un elemento del primo insieme sia associato più di un elemento del secondo insieme.

Il Dominio è l'insieme dei valori ammissibili per la variabile indipendente.

Il Codominio di una funzione è l'insieme dei valori che la variabile dipendente può assumere.

Una funzione si dice limitata o illimitata se è tale il suo codominio.

Una funzione è costante quando associ lo stesso valore ad ogni x del dominio. f(x)=k. Il codominio è solo k.

Una funzione è **simmetrica** rispetto all'asse y quando risulti, per ogni x ϵ I tale che sia anche -x ϵ I

Data la funzione z=f(x,y), di dominio D R^2 ,si chiamano sue **curve di livello** i loghi dei punti del piano su cui la f assume uno stesso valore.

Funzione inversa

Una funzione è **invertibile** quando non solo, dato x, è definito un unico valore y che gli corrisponde, ma anche, viceversa, ogni y del codominio provenga da un solo valore x del dominio. Per essere invertibile, deve essere biunivoca. una FUNZIONE si dice **BIUNIVOCA** se ogni elemento di *Y* è immagine di uno e un solo elemento di *X.*

La regola che descrive il passaggio dalla y alla x si chiama **funzione inversa** della f ed è f^{-1}

Y=1/2x+1   x $\longrightarrow$ y

-1/2x=-y+1   y=2x-2

X=2y-2

Funzione composte

Una funzione composta è una funzione che si ottiene mediante l'operazione di composizione di due funzioni. La funzione composta si definisce applicando la seconda funzione alle immagini della prima.

Date f e g la **funzione composta** $f \circ g$ (che si legge, " f composto g") è quella che preso un valore della variabile x, prima calcola $g(x)$ e poi applica f al valore $g(x)$. Ossia:

$$x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f(g(x))$$

$$x \xmapsto{f \circ g} f(g(x))$$

La **composizione** si può fare anche con più di due funzioni, e bisogna ricordare che è un'**operazione non commutativa: in generale,** $f \circ g \neq g \circ f$. Bisogna quindi porre attenzione all'ordine in cui le funzioni vengono composte.

Capitolo VI
Successioni e serie numeriche

Una **successione numerica**(reale) è una legge che ad ogni intero positivo fa corrispondere un numero reale, ovvero una funzione reale definita su N. è una legge che ad ogni numero naturale n associa un numero reale a_n.

Una successione $\{a_n\}$ di dice:

→ Limitata inferiormente se esiste m є R tale che $a_n >= m$
→ Limitata superiormente se esiste M є R tale che $a_n <= M$
→ Limitata se esistono m e M tali che $m <= a_n <= M$

~ Monotona crescente se $a_n <= a_{n+1}$
~ Monotona decrescenta se $a_n >= a_{n+1}$
~ Costante se tutti i suoi termini sono uguali
~ Non decrescente se $a_n <= a_{n+1}$
~ Non crescente se $a_n >= a_{n+1}$

Si dice che una successione possiede una certa proprietà definitivamente se esiste N ap N tale che a_n soddisfa quella proprietà per ogni n>=N

$a_n=2n-3$: -3,-1,1,3,5… => 2n-3 è definitivamente positiva

Convergenza e divergenza

La successione $\{a_n\}$ **converge** ad l ap R se , dato comunque il numero reale positivo ε, esiste un valore n_ε dell'indice successivamente al quale tutti i termini della successione differiscono da l per meno di ε in valore assoluto. Si dice che $\{a_n\}$ tende ad l, e che l è il limite di $\{a_n\}$.

Esempio: {1/n} i termini distano da 0 per meno di ε=0,01 per tutti gli n>nε =100.

Teoremi:

- Una successione costante di termini tutti uguali a k converge a k.
- Se tutti i termini di una successione a partire dall'm-mo sono uguali a k, la successione converge a k.

La successione S **diverge** positivamente(negativamente) e si scrive lim{a_n}=+∞(-∞), se dato comunque il numero reale k, esiste un valore n_k dell'indice successivamente al quale i termini della successione sono definitivamente maggiori(minori) di k.
Esempio: log(n) il limite tende a + infinito
Una successione convergente o divergente si chiama **regolare.** Le successioni non regolari si chiamano **indeterminate**.(esempio: 1,0,1,0,1,…).Una successione convergente si chiama anche regolare.
Si chiama **carattere** di una successione il suo essere convergente, o divergente, o indeterminata.
Una successione il cui limite sia 0 si dice **infinitesima** .Invece la successione si dice **infinita** quando il limite è +-∞ è la successione diverge.

Successioni di Cauchy

Una successione converge secondo Cauchy se dato comunque il numero reale positivo ε, esiste un valore nε dell'indice successivamente al quale la differenza tra due qualunque termini di S è, in modulo, minore di ε.Una successione convergente è una successione di Cauchy.
Se una successione è convergente ad un qualunque limite(finito), essa risulta essere una successione di Cauchy.

Limiti delle successioni .Le forme indeterminate

- Il limite di una successione, se esiste , è unico.
- Una successione monotona non è mai indeterminata: se è non decrescente ,diverge positivamente o converge all'estremo superiore dell'insieme dei suoi termini, a seconda che questo sia illimitato o limitato superiormente; se è non crescente, diverge negativamente o converge all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini, a seconda che questo sia illimitato o limitato inferiormente.
  e= $\lim(1+1/n)^n$
- **Teorema del confronto-**Se S e T sono entrambe regolari, e almeno a partire da un certo valore n_0 dell'indice- i termini di S sono tutti non minori dei corrispondenti termini di T , allora il limite di S è non minore di quello di T .Viceversa: se S e T sono regolari, ed il limite si S è maggiore di quello di T, almeno a partire da un certo valore dell'indice i termini di S sono tutti maggiori dei corrispondenti termini di T.
- **Teorema della permanenza del segno:** Se una successione è, almeno a partire da un qualche valore dell'indice , a termini tutti non negativi(non positivi), ed è regolare, il suo limite non può essere negativo(positivo).

- **Teorema dei carabinieri:** Siano S={a_n}, T={b_n} e U={c_n} tre successioni per le quali -almeno a partire da un certo valore n_0 dell'indice – valgono le due disuguaglianze

$$a_n <= b_n <= c_n$$

  Allora, se S ed U convergono allo stesso limite l , anche T converge ad l.

Il limite della somma è la somma dei limiti

- Se S e T convergono, S+T converge ed ha per limite la somma dei limiti; se S converge e T diverge positivamente(negativamente), S+T diverge positivamente(negativamente) ,se S e T divergono positivamente(neg) ,S+T diverge positivamente(neg).

$Lim[k+ a_n]=k+lim[a_n]$

$l+\infty=+\infty$ $l-\infty=-\infty$ $+\infty+\infty=+\infty$ $-\infty-\infty=-\infty$

$+\infty -\infty=?$

Successione prodotto ST di due successione $S=\{a_n\}$, $T=\{b_n\}$ la successione dei prodotti dei prodotti: $ST= \{a_n b_n\}$ .Il limite del prodotto è il prodotto dei limiti.

- Se S e T convergono ,ST converge ed ha per limite il prodotto dei limiti; se S converge ad l diverso da 0 o diverge, e T diverge, ST diverge ed il segno della divergenza è stabilito dalla regola dei segni.

$l*(+-)\infty=+-\infty$ per l diverso da 0 $+-\infty*(+-)\infty=+-\infty$

$0*(+-)\infty$ - forma indeterminata

- Il limite della potenza è il limite delle basi elevato al limite degli esponenti
  Siano $S=\{a_n\}$ e $T=\{b_n\}$ due successioni regolari, S a termini positivi.
- La successione degli inversi ha per limite l'inverso del limite. Se $S=\{a_n\}$ converge ad l diverso da 0 ed è a termini non nulli ,S^{-1} converge ad l^{-1}.Se S diverge, S^{-1} converge a 0; se S converge a 0 , la successione degli inversi dei valori assoluti diverge positivamente.
- Il limite del quoziente è il quoziente dei limiti. Sia $S=\{a_n\}$ e $T=\{b_n\}$, T a termini non nulli. Se S converge ad l e T converge ad l1 diverso da 0, S/T converge ad l/l1. Se S converge e T diverge, S/T converge a 0. Se S converge ad l diverso da 0 o diverge, e T converge a 0 , la successione $\{a_n\}/\{b_n\}$ diverge. Se S diverge e T converge ad l diverso da 0 ,S/T diverge.
- Il limite del logaritmo è il logaritmo del limite: Se la successione a termini positivi $S=\{a_n\}$ converge ad l, la successione dei suoi logaritmi converge al logaritmo di l; se S diverge, anche la successione dei logaritmi diverge.

Le serie numeriche

Sia la successione $\{a_n\}$, si consideri l'operazione consistente , idealmente, nel sommare via via tutti i termini. a1+a2+a3+.. $\sum_{n=1}^{\infty} an$ -serie di termini a_n , o serie associata alla successione.

Si chiama **somma ridotta** , o **parziale** , di ordine n la serie $\sum_{n=1}^{\infty} an$ e si indica col simbolo S_n la somma dei suoi primi n termini.

⌂Si dice che la **serie converge** ed ha per somma S se la successione delle sue somme ridotte converge al limite finito S.

⌂Si dice che la **serie diverge** positivamente(neg) ed ha per somma +∞(-) se la successione delle sue somme ridotte diverge pos(neg).

⌂Si dice che la **serie è indeterminata** se tale è la successione delle sue somme ridotte.

- Una serie a termini di segno costante non è mai indeterminata

Serie geometrica:

Laserie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ si chiama serie geometrica

$\begin{cases} \text{Se } q \neq 1 \text{ allora } 1-q^{n+1}/1-q \\ \end{cases}$

$S_n=1+q+q^2+q^3+\ldots=$

Se q=1 allora n+1

lim S_n =
- |q|<1 allora 1/1-q ,la serie è convergente
- q>=1 allora +∞ la serie diverge
- q<=-1 allor non esiste la serie è indeterminata

- La pr... e per quelle divergenti

Si chiama **resto n-mo** , o resto di ordine n, della serie, la serie ottenuta trascurandone i primi n termini.

- Una serie e tutte le sue serie resto hanno lo stesso carratere.
- Se una serie converge, la successione dei suoi resti n-mi è infinitesima.

<u>Criteri di convergenza</u>

- **Criterio di convergenza di Cauchy:** La serie converge se e soltanto se, dato comunque ε>0, è possibile determinare , in corrispondenza ad esso , un valore nε dell'indice, successivamente al quale la differenza tra due qualunque termini della successione delle ridotte è, in modulo minore di ε.
- **Criterio di convergenza di Cauchy II:** La serie converge se e soltanto se, dato comunque ε>0, è possibile determinare , in corrispondenza ad esso ,un valore nε dell'indice, successivamente al quale la somma di un qualunque numero p di termini consecutivi della serie è , in valore assoluto, minore di ε.
- **Condizione necessaria di convergenza:** Se una serie converge, la successione dei suoi termini è infinitesima.

- **Criterio del confronto:** Siano $\sum an$ e $\sum bn$, due serie a termini positivi, ed esista una costante c per le quali risulti $b_n<=c*a_n$
Per ogni n. Allora ,se $\sum an$ converge, $\sum bn$ converge; se $\sum an$ diverge, $\sum bn$ diverge.

- **Criterio del rapporto:**
Sia a>0 definitivamente e supponiamo che lim $a_{n+1}/a_n=l$
-se l<1 allora la serie converge
-se l>1 allora la serie diverge
-se l=1 è tutto possibile, bisogna cambiare criterio.

- **Criterio della radice**
Sia $a_n>=0$ definitivamente e supponiamo che lim $\sqrt{an}=l$
  - Se l<1 allora la serie converge
  - Se l>1 allora la serie diverge
  - Se l=1 tutto è possibile

criteri ... ta la *serie*
$\sum_{n=0}^{\infty}($ ... sione $\{a_n\}$ goda delle seguenti
proprie...

- **Criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno**

2. Sia *definitivamente monotona non crescente*, cioè da un certo punto in poi $a_{n+1} \leq a_n$
3. Ammetta *limite*e questo sia *uguale a zero*, ossia $\lim a_n = 0$

Allora possiamo dire che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge. In simboli:

$$\begin{cases} a_n \geq 0 \text{ definitivamente} \\ a_{n+1} \leq a_n \text{ definitivamente} \\ \lim a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Derivate

La derivata descrive come varia una funzione *f(x)* quando varia il suo argomento x. Più in generale, la derivata esprime la variazione di una grandezza rispetto a un'altra: il campo di applicazioni è vastissimo.

Definizione

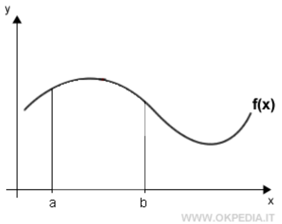
Consideriamo la funzione y=f(x) di dominio I e sia $x_0 \in I$. Incrementiamo x_0 della quantità h: se x_0+h è ancora in I , è possibile calcolare $f(x_0+h)$.La differenza: $\delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$ rappresenta l'incremento che la variabile dipendente subisce in relazione all'incremento, da x_0 ad x_0+h, della indipendente.
Si chiama **rapporto incrementale** della f nel punto x_0 e relativo all'incremento h della x il quoziente: $\frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}$ tra l'incremento della variabile indipendente (a denominatore) e, a numeratore il corrispondente incremento della variabile dipendente.
Il limite per h tendente a 0 del rapporto incrementale , se esiste finito , si chiama **derivata della f in x_0**, e si denota con il simbolo $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)= \lim_{x \to 0} \frac{f(x0+h)-f(x0)}{h}$$

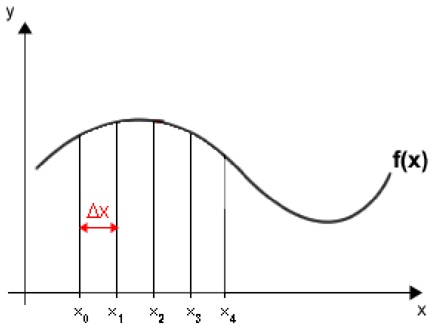
La f si dice **derivabile in x_0** se, in questo punto, ammette derivata; **derivabile in J($\subseteq$ I),** se è derivabile in ogni punto di J.
Si chiama **funzione derivata** della f(x), la funzione che assume in x il valore della derivata f in tale punto. La indicheremo con uno dei simboli y=f'(x)

Integrali

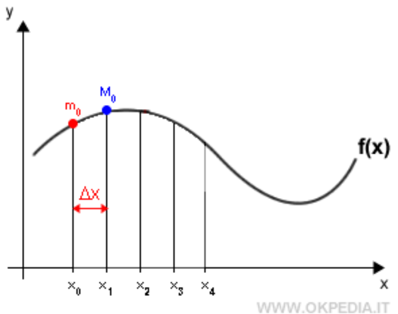
L'integrale è un operatore che agisce sulle funzioni. Nel contesto delle funzioni reali di variabile reale si può parlare di integrali definiti, che associano ad una funzione l'area sottesa dal grafico su un dato intervallo, e di integrali indefiniti, che individua le antiderivate(o primitive) della funzione.
L'integrale definito di una funzione f(x) in un intervallo [a,b] è un numero reale che misura l'area S compresa tra la funzione e l'asse delle ascisse, delimitata dai due segmenti verticali che congiungono gli estremi [a,b] al grafico della funzione.
La spiegazione dell'integrale definito In geometria l'integrale definito è utilizzato per calcolare l'area di una figura geometrica curvilinea.



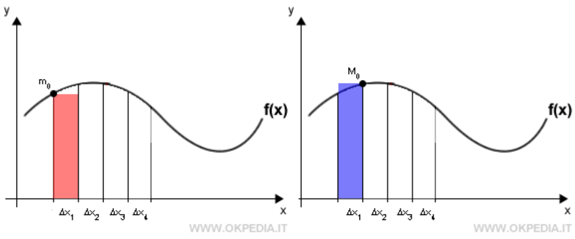
Per calcolare l'area tra il grafico di una funzione e l'ascisse in un intervallo chiuso [a,b] si suddivide la basa in intervalli più piccoli [xi,xi+1] di ampiezza costante Δx



Ciascun intervallo ha un valore minimo mi e un valore massimo Mi



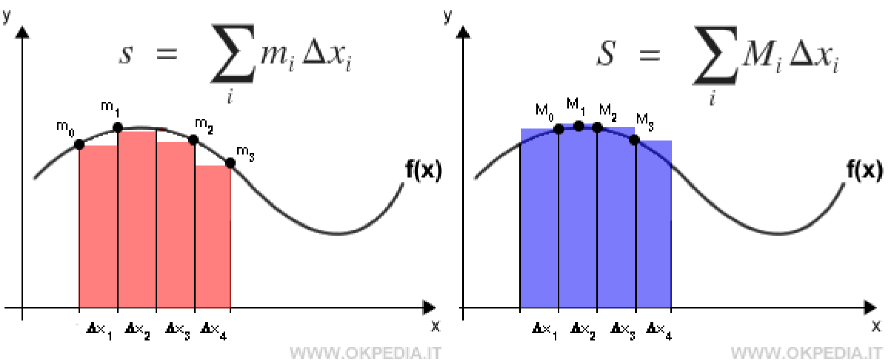
Quindi, per ogni intervallo [xi,xi+1] è possibile calcolare l'area del rettangolo fino al valore minimo miΔxi e l'area del rettangolo fino al valore massimo MiΔxi.



Sommando le superfici dei rettangoli si ottengono due aree: La somma inferiore s è la somma delle aree degli intervalli miΔxi. La somma superiore S è la somma delle aree degli intervalli MiΔxi.

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i \qquad S = \sum_i M_i \Delta x_i$$

L'area della figura curvilinea è compresa tra la somma inferiore s e la somma inferiore S.



Facendo tendere a zero gli intervalli [xi,xi+1] (le basi dei rettangoli) la somma inferiore e superiore convergono all'integrale definito I, ossia all'area della figura curvilinea.

$$\lim_{\Delta x \to 0} s = \lim_{\Delta x \to 0} S = I$$

Al ridursi della base Δx i rettangoli diventano sempre più piccoli, riducendo la presenza delle superfici in difetto o in eccesso intorno al grafico. L'integrale definito della funzione f(x) nell'intervallo [a,b] è indicato con la seguente notazione

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

Il simbolo dell'integrale ∫ rappresenta la somma dall'estremo sinistro (a) all'estremo destro (b) delle aree dei rettangoli. L'area di ogni rettangolo è determinata da f(x)·dx, dove f(x) identifica l'altezza e dx la larghezza (base) dei rettangoli infini

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

In pratica, l'integrale definito è l'incremento di una qualsiasi funzione primitiva di f(x) dall'estremo sinistro (a) all'estremo destro (b).