LEZIONE 2/10/2023

MATRICI

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1/2 & 0 \\ 3/10 & 2 & \pi & -7/4 \\ \sqrt{2} & e & 45 & 10 \end{pmatrix}$$ } VI SONO NUMERI RAZIONALI E IRRAZIONALI

3 RIGHE E 4 COLONNE

$a/b \quad a,b \in \mathbb{Z} \quad b \neq 0$

↓ MATRICE

UNA MATRICE E' UN ORDINAMENTO RETTANGOLARE

$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1/2 & 0 \\ 3/10 & 2 & \pi & -7/4 \\ \sqrt{2} & e & 45 & 10 \end{pmatrix} \quad a_{23} = \pi$$

m RIGHE
n COLONNE

$\mathbb{R}^{m,n} = \{$MATRICI DI ORDINE $m \times n$ A COEFF. REALI$\}$

$$\mathbb{R}^{2,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} / a,b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \mathbb{R}^{3,3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} / a_{ij} \in \mathbb{R} \;\; i=1,2,3 \;\; j=1,2,3 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1/2 & 0 \\ 3/10 & 2 & \pi & -7/4 \\ \sqrt{2} & e & 45 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{3,4}$$

UGUAGLIANZA TRA MATRICI

$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$

$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i \; \forall j$

SOMMA TRA MATRICI

LA SOMMA PUO' AVVENIRE SOLO SE LE MATRICI DELLA SOMMA HANNO LO STESSO N. DI RIGHE E COLONNE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \to \text{NO}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 2 & 7 & 1/2 \end{pmatrix}$$

DEF: $A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad A = (a_{ij})_{m \times n} \quad B\,(b_{ij})_{m \times n}$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

TEOREMA

$\mathbb{R}^{m,n}$

1. $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ ALLORA $A+B = B+A$ PER LA PROPRIETA' COMMUTATIVA
2. $A + (B+C) = (A+B) + C$ PER LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA

③ $\exists\ 0=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} / A+0=A$ $\quad 0_{m\times n}$ E' LA MATRICE NULLA DI ORDINE $m\times n$

④ $\forall A\in\mathbb{R}^{m,n}\ \exists B\in\mathbb{R}^{m,n} / A+B=0$ $\quad$ SE $A=(a_{ij}),\ B=(-b_{ij})$

NOTAZIONE $B=-A$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

DEF: $\lambda\in\mathbb{R},\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$A=(a_{ij})_{m\times n} \quad \lambda\cdot A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$

ESEMPIO:

$$5\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 & 20 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

① $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

② $(\lambda+\mu)A$ CON $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\lambda A+\mu A$

③ $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \quad A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

④ $1\cdot A=A$

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

$A=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}}\rightarrow\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$ $\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n}\rightarrow {}^TA\in\mathbb{R}^{n\times m}$

$A=(a_{ij})_{m\times n}\rightarrow {}^TA=(a_{ji})_{n\times m}$

TEOREMA

- ${}^T({}^TA)=A$
- ${}^T(A+B)={}^TA+{}^TB$
- ${}^T(\lambda A)=\lambda\cdot{}^TA \quad \lambda\in\mathbb{R}$

PRODOTTI TRA MATRICI

- $\underset{1\times 3}{(1\ 2\ 4)}\cdot\underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}=19$ $(1\cdot 1+2\cdot -1+4\cdot 5)$
- $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ PRIMA RIGA x PRIMA COLONNA
PRIMA RIGA x SECONDA COLONNA
SECONDA RIGA x PRIMA COLONNA
SECONDA RIGA x SECONDA COLONNA

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 26 & 13 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$

PRIMA RIGA x PRIMA COLONNA
PRIMA RIGA x SECONDA COLONNA
SECONDA RIGA x PRIMA COLONNA
SECONDA RIGA x SECONDA COLONNA
TERZA RIGA x PRIMA COLONNA
TERZA RIGA x SECONDA COLONNA

DEF: $A = (a_{ik})_{m \times n} \quad B = (b_{kj})_{n \times p}$

$A \cdot B \overset{def}{=} C = (c_{ij})_{m \times p}$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} + b_{2j} + \dots + a_{in} + b_{nj}$

ESEMPI

- $c_{24} = a_{21} b_{14} + a_{22} b_{24} + a_{23} b_{34} \dots a_{2n} b_{n4}$

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -5 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 17 \\ 23 & -1 & 49 \end{pmatrix}$

$A \cdot B$

$B \cdot A$ NON SAREBBE DEFINITO

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ANCHE SE IL PRODOTTO E' POSSIBILE, NON E' LA STESSA COSA

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$(A \cdot B) \cdot C = A (B \cdot C)$

OSSERVAZIONE

E' FALSO

$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \lor B = 0$

CONTROESEMPIO

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

TEOREMA

${}^T(A \cdot B) = {}^T B \cdot {}^T A$

TEOREMA

$A \cdot (B + C) = A\,B + A \cdot C$

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A \cdot A + \overbrace{B \cdot A + A \cdot B}^{\neq 2AB} + B \cdot B$

$= A^2 + B^2 + A \cdot B + B \cdot A$

$A^2 - B^2 \overset{?}{=}$

$(A+B)(A-B)$ NON E' PROPRIETA'

LEZIONE 4/10/2023

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ e' definito

puo' essere che:

- $B \cdot A$ non definito
- $B \cdot A$ non stesso ordine
- $B \cdot A$ stesso ordine ma non uguali

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 5 & 10 & -5 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C)$ e' associativa e distributiva, infatti $(A+B) \cdot C = AC + BC$ e $A(B+C) = AB + AC$

esercizio: creare una matrice che, moltiplicata per se stessa, dia comunque A ($A^2 = A \cdot A = A$)

$A^2 = A \cdot A = A$ idempotente

$A^n = 0$ nilpotente

PROPRIETA'

$\alpha \in \mathbb{R}$ sia scalare

$\alpha(A \cdot B) = A(\alpha B)$

TRASPORTA

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

${}^TA = (a_{ij})_{n \times m}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ${}^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

${}^T(A \cdot B) = {}^TB \cdot {}^TA$

verifica

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

${}^TA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ${}^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$${}^TB \cdot {}^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 2 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 13 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

$${}^T(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 2 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

la proprieta' funziona

Matrici quadrate

Hanno coeff $\mathbb{R}^{n,n}$ e sono moltiplicabili tra di loro

Def: $A=(a_{ij})_{n\times n}$ matrice triangolare superiore se e solo se $a_{ij}=0 \ \forall j<i$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & \dots & & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Analogamente, si definisce matrice triangolare inferiore se e solo se $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $a_{ij}=0 \ \forall j>i$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio matrice 3x3 t. superiore

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & \pi & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio matrice 2x2 t. inferiore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Def: $A=(a_{ij})_{n\times n}$ si dice diagonale se e solo se $a_{ij}=0 \quad \forall i\neq j$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ inoltre è sempre triangolare superiore e inferiore

Matrice identità

$$I_{n\times n}=I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ nella diagonale sono tutti 1, fuori dalla diagonale sono tutti 0

$$I_n=(\delta_{ij}) \qquad \delta_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$I_1=(1)$$

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n^2=I_n\cdot I_n=I_n$$

Teorema

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad A\cdot I_n=A=I_n\cdot A$

funziona la commutatività

dimostrazione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matrice simmetrica

Def: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$; A si dice simmetrica se e solo se ${}^{T}A = A$

Esercizio: caratterizzazione di simmetriche 2x2

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ NON simmetrica $\rightarrow {}^{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

la prima riga e la prima colonna devono essere uguali alla matrice

Esercizio: caratterizzazione simmetriche 3x3

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ quindi $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$

6 parametri liberi e 3 condizionati

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} / {}^{T}A = A\}$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} / a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$

insieme di tutte le matrice simmetrica 3x3 a coeff. reali

Matrici antisimmetriche

Def: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice antisimmetrica se e solo se ${}^{T}A = -A$

Esercizio: caratterizzazione antisimmetriche 2x2

${}^{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$a = -a \Rightarrow a = 0$
$c = -b$
$d = -d \Rightarrow d = 0$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$ solo 1 parametro libero

Esercizio: caratterizzazione antisimmetriche 3x3

$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$ 3 parametri liberi

TEOREMA

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $A = X + Y$ dove X e' simmetrica e Y e' antisimmetrica

dimostrazione: $A = 1/2(A + {}^{T}A) + 1/2(A - {}^{T}A)$, dove $X = 1/2(A + {}^{T}A)$ e $Y = 1/2(A - {}^{T}A)$

X risulta essere simmetrica, infatti si deve dimostrare che ${}^{T}X = X$

${}^{T}X = {}^{T}(1/2(A + {}^{T}A)) = {}^{T}(1/2A + 1/2\,{}^{T}A) = 1/2\,{}^{T}A + 1/2\,{}^{T}({}^{T}A) = 1/2\,{}^{T}A + 1/2A = 1/2(A + {}^{T}A) = X$

Si procede a verificare che ${}^{T}Y = -Y$

$^T(1/2(A-{}^TA)) = {}^T(1/2A - 1/2\,{}^TA) = 1/2\,{}^TA - 1/2\,{}^T({}^TA) = 1/2\,{}^TA - 1/2A = -1/2({}^TA - A) = -Y$

Esempio

Decomporre $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ come la somma di una matrice simmetrica + una matrice antisimmetrica

$$X = 1/2\left(\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1/2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = 1/2\left(\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1/2\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisimmetrica}}$$

Esempio

Decomporre $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ come somma simmetrica e antisimmetrica

$$X = 1/2\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = 1/2\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y = 1/2\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = 1/2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 5/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 5/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici invertibili

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A si dice invertibile se e solo se esiste una matrice $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $A\cdot B = B \cdot A = I_n$

NOTA: $B = A^{-1}$

Non tutte le matrici sono invertibili

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e' invertibile, infatti esiste $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ caso di commutatività

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ non tutte le matrici quadrate hanno questa proprietà

Osservazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a=1$ $\quad 0=0$ $\quad$ Si lavora in $\mathbb{R}$, $0=1$ non può esistere, quindi non tutte
$b=0$ $\quad 0=1$ $\quad$ le matrici quadrate possiedono un'inversa

Notazione

Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e' invertibile, allora $\exists B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. $B = A^{-1}$ e' unica.

$A \in \mathbb{R}^{2,2}$: Quando A e' invertibile?

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} d/ad-bc & -b/ad-bc \\ -c/ad-bc & a/ad-bc \end{pmatrix}$ RIVEDERE A CASA, FAI DIMOSTRAZIONE DA SOLA

$A \in \mathbb{R}^{2,2}$ A e' invertibile se $ad-bc \neq 0$

Def: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ allora il determinante di A sara' $ad-bc$

$$\text{determinante} = |A|$$

Teorema

$A \in \mathbb{R}^{2,2}$ A e' invertibile se e solo se il determinante di $A \neq 0$.
Inoltre $A^{-1} = 1/\det A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ A e' invertibile? sì

$\det A = 1 \cdot 4 - (2)(-3) = 10$

$A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$ e' l'inversa di A

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 3/10 & 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ PROVARE A FARE $\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esempio

$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ non e' invertibile

$\det A=-2+2=0$

$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ e' inversibile

$\det A=0-1=-1$

$A^{-1}=-1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Teoremi

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

- A e' invertibile se e solo se ${}^{T}A$ e' invertibile
- ${}^{T}(A^{-1})=({}^{T}A)^{-1}$

$A,B\in\mathbb{R}^{n,n}$

- A e B sono invertibili se e solo se il prodotto risulta essere invertibile
- $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$
- $(A\cdot B)(B^{-1}\cdot A^{-1})=I_n$, perche' $A(B\cdot B^{-1})A^{-1}$

LEZIONE 9/10/2023

$A\in\mathbb{R}^{n,n}$ A e' invertibile se e solo se $\exists B\in\mathbb{R}^{n,n}$ tale che $A\cdot B=B\cdot A=I_n$

$I_n=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ se $\exists B$

Si scrive come A^{-1} (risulta essere unica)

caso $n=2$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ e' invertibile se e solo se $\underbrace{ad-bc}_{\det A}\neq 0$

E risulta che $A^{-1}=1/\det A\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

$A^{-1}=1/ad-bc\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Esempio

$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

$\det A=15+2=17$ ($\neq 0$) invertibile

$A^{-1}=\begin{pmatrix}5/17 & 2/17\\ -1/17 & 3/17\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5/17 & 2/17\\ -1/17 & 3/17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -6\end{pmatrix}$ $\det A=-6+6=0$ non invertibile

Esercizio

Calcolare A^{-1} se $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\det A = 6+4=10$

$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$1/10\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -3/10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 3/10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrici inverse 3x3

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Si definisce $\det A = |A| =$

$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

Esempio

Calcolare $|A|$ sapendo che $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$|A| = 1\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

$|34| + 3|6| + 2|5| = 62$ ($\neq 0$ invertibile)

A e' invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \quad n=3$

$A^{-1} = 1/\det A \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ dove $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$
dove M_{ij} e' il $\det A$ che si ottiene trascurando la riga i-esima e la colonna j-esima

$A^{-1} = 1/62\begin{pmatrix} 34 & -6 & 5 \\ -28 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 34 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$

$$A^{-1} = 1/62 \begin{pmatrix} 34 & -6 & 5 \\ 28 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 17/31 & -3/31 & 5/62 \\ 14/31 & 3/31 & -5/62 \\ -1/31 & 2/31 & 7/62 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17/31 & 14/31 & -1/31 \\ -3/31 & 3/31 & 2/31 \\ 5/62 & -5/62 & 7/62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{17}{31} + \frac{9}{31} + \frac{\cancel{10}\,5}{62\,31} = \frac{31}{31} = 1 \qquad \frac{14}{31} + \frac{12}{31} + \frac{\cancel{10}\,5}{62\,31} = 1$

$\frac{14}{31} - \frac{9}{31} - \frac{5}{31} = 0 \qquad -\frac{1}{31} + \frac{8}{31} - \frac{7}{31} = 0$

$-\frac{1}{31} - \frac{6}{31} + \frac{14\;7}{62\,31} = 0 \qquad 0 - \frac{15}{31} + \frac{30\;15}{62\,31} = 0$

$\frac{17}{31} - \frac{12}{31} - \frac{5}{31} = 0 \qquad 0 + \frac{15}{31} - \frac{30\;15}{62\,31} = 0$

$0 + \frac{10}{31} + \frac{42\;21}{62\,31} = 1$

Esempio

$A = \ldots$

$A^{-1} = 1/\det A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad 1/\det A\,{}^T(A_{ij})$

$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 - 1 = -1$

$A_{11} = 0 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = -1$

$A_{21} = 0 \quad A_{22} = -1 \quad A_{23} = 1$

$A_{31} = -1 \quad A_{32} = 1 \quad A_{33} = 0$

$${}^T\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = {}^T\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -1\,{}^T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CALCOLO DI DETERMINANTI

$A=(a_{ij})$ $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

ESTENSIONE

$\det(A)=|A|=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}+a_{1n}\cdot A_{1n}$

$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$

M_{1j} e' il determinante ottenuto dimenticando la prima riga e la colonna j-esima

Esempio

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&2&-1&3\\1&1&4&2\\0&1&0&2\end{pmatrix} \quad \det A=1\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&4&2\\1&0&2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1&-1&3\\1&4&2\\0&0&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{vmatrix}+2(-1)\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&4\\0&1&0\end{vmatrix}$$

PROPOSIZIONE

$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$ FORMULA di BINET

in generale il $\det(A+B)\neq\det A+\det B$

$$\det\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]=\det\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$$

$$\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1 \quad \det\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=1 \quad \det=2$$

IMPORTANTE

$\det(A)=\det{}^T(A)$

TEOREMA

il determinante di una matrice triangolare superiore/inferiore e' il prodotto della sua diagonale

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} \quad \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{pmatrix} \quad a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}0&a_{23}\\0&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}0&a_{22}\\0&0\end{vmatrix}$$

PROPOSIZIONE

se A' e' ottenuta da A sommando a una riga (colonna) un multiplo di un'altra allora vale l'uguaglianza

$\det A=\det(A')$

$\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\\alpha a_{11}+a_{21}&\alpha a_{12}+a_{22}&\alpha a_{13}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

PROPOSIZIONE

Se A' e' ottenuta da A moltiplicando una riga (colonna) per una costante α ($\alpha \in \mathbb{R}$), allora
$\det(A') = \alpha \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ESEMPIO

$\det \lambda A = \lambda^n \cdot \det A$
$A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -43$$

$$\det(3 \cdot A) = 3^3 \cdot \det A$$
$$27 \cdot -43$$

PROPOSIZIONE

se A' e' ottenuta da A scambiando 2 righe (colonne) diverse, allora $\det(A) = -\det(A')$

$$\alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ MD } \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$$

ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad -4$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \qquad -7$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 \cdot 6 & -1 \cdot 6 & -2 \cdot 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$-6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

TEOREMA LAPLACE

$A = (a_{ij})_{n \times n} \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{nj}A_{nj}$$

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \cdot 5 + 1(-4) + 2(-12) = -23$
$\det A = 4(-7) + 2(-1) + 1 \cdot 3$
$= -28 + 2 + 3 = -23$

LEZIONE 11/10/2023

ESERCIZIO

$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = 12$ e' invertibile? sì

$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 \\ 1/4 & -1/12 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 \\ 1/4 & -1/12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO

calcolare inversa trasposta di A

$({}^{T}A)^{-1} = {}^{T}(A^{-1})$

$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 \\ 1/4 & -1/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ -1/6 & -1/12 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO D'ESAME

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Provare che e' invertibile

$\det = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$A^{-1} = 1\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ESERCIZIO

calcolare $\longrightarrow$ • $|A \cdot B^2|$, $|A+B|$, $|AB+A^2|$ determinanti

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

• $\det(A \cdot B^2) = \det A \cdot \det B^2 = \det A \cdot \det(B \cdot B) = \det A \cdot \det B \cdot \det B = (\det A)(\det B)^2$

$\det A = 2(4) - 1 \cdot (-4) = 12$

$\det B = 2(-7) - 1(-23) + 2(-6) = -3$

$|A \cdot B^2| = 12 \cdot 9 = 108$

• $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$\det|A+B \cdot 4 \cdot (-7) - 1(49) + 1(-21) = -28 + 49 + 21 = 0$ non e' invertibile

• $|AB + A^2| = \det(A(B+A)) = \det A \cdot \det(B+A) = 12 \cdot 0 = 0$

ESERCIZIO

USANDO LE PROPRIETA' DEL DETERMINANTE, CALCOLARE IL DET DI

$$\begin{vmatrix}1&2&2&3\\4&1&-1&2\\3&6&6&8\\3&2&1&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&-7&-9&-10\\0&0&0&-1\\0&-4&-5&-6\end{vmatrix}$$

MOLTIPLICATO LA PRIMA RIGA PER -4
E SOMMATO CON SECONDA RIGA
POI PER -3
INFINE PER -3
SCAMBIARE ULTIMA E PENULTIMA RIGA

$$-\begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&-7&-9&-10\\0&-4&-5&-6\\0&0&0&-1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&-7&-9&-10\\0\cdot -4&-4\cdot 1&-4\cdot 5/4&-4\cdot -6/4\\0&0&0&-1\end{vmatrix} = -(-4)\begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&-7&-9&-10\\0&1&5/4&3/2\\0&0&0&-1\end{vmatrix}$$

SI MOLTIPLICA PER -4

$$= -4\begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&1&5/4&3/2\\0&-7&-9&-10\\0&0&0&-1\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}1&2&2&3\\0&1&5/4&3/2\\0&0&-1/4&1/2\\0&0&0&-1\end{vmatrix} = -1$$

MOLTIPLICO PER 7
E SOMMO ALLA
TERZA RIGA

SI E' CALCOLATO
IL DETERMINANTE

TECNICA DI PIVOT

ESERCIZIO

Sia $A = \begin{pmatrix}-1&2&1\\1&-3&0\\2&2&1\end{pmatrix}$

$\det A = -1\cdot(-3) - 2(1) + 1(8) = 9$

$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3&-1&8\\0&-3&6\\3&1&1\end{pmatrix}$ $A_{11} = -3$ $A_{12} = -1$ $A_{13} = 8$; $A_{21} = 0$ $A_{22} = -3$ $A_{23} = 6$; $A_{31} = 3$ $A_{32} = 1$ $A_{33} = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3&0&3\\-1&-3&1\\8&6&1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-1/3&0&1/3\\-1/9&-1/3&1/9\\8/9&2/3&1/9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1/3&0&1/3\\-1/9&-1/3&1/9\\8/9&2/3&1/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&-3&0\\2&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

RISOLUZIONI DI SISTEMI DI EQUAZIONI

INVARIANTE MATEMATICO MOLTO IMPORTANTE

RANGO DI UNA MATRICE

SIANO A E B DUE MATRICI IN $\mathbb{R}^{m,n}$ T.C. ESISTA UNA SUCCESSIONE FINITA DI OPERAZIONI ELEMENTARI DI RIGHE CHE TRASFORMA A IN B, ALLORA SI DICE CHE A E B SONO EQUIVALENTI PER RIGA.

MATRICE RIDOTTA

SI CONSIDERI UNA MATRICE $A^{m \times n}$, UNA MATRICE RIDOTTA PER RIGHE VIENE DEFINITA SE E SOLO SE PER OGNI RIGA NON NULLA, ESISTE UN ELEMENTO NON NULLO AL DI SOTTO DEL QUALE SULLA MEDESIMA COLONNA VI SIANO SOLO ZERI OPPURE IN NESSUNA ULTERIORE ENTRATA.

ESEMPIO

- $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 & 14 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \end{pmatrix}$ PER LA PRIMA RIGA, AL DI SOTTO DI $\sqrt{2}$ E 14 CI SONO SOLO ZERI
  PER LA SECONDA RIGA, AL DI SOTTO DI 9 TUTTI ZERI
  PER LA TERZA RIGA, AL DI SOTTO DELL'1 TUTTI ZERI
  PER LA QUARTA RIGA, NON E' NULLA QUINDI COMPLETA LA DEFINIZIONE

- $\begin{pmatrix} 3 & 22 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

INOLTRE UNA MATRICE SI DICE RIDOTTA PER COLONNE SE E SOLO SE LA SUA TRASPOSTA E' RIDOTTA PER RIGHE:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^{T}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 45 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERAZIONI/TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

① $R_{ij} \to R_i + \alpha R_{i_0}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad i_0 \neq i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 + 3R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 + (-2R_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

② $R_i \to \alpha R_i$ $\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad i \neq 0$ $\qquad$ MOLTIPLICARE UNA RIGA DI A PER UN NUMERO NON NULLO

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 5R_1 \quad \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

③ $R_i \leftrightarrow R_j$ SCAMBIO DI 2 RIGHE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Lezione 16/10/2023

RIPASSO

$R_i \to \lambda R_j + R_i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(I) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -5a_{21}+a_{31} & -5a_{22}+a_{32} & -5a_{23}+a_{33} \end{pmatrix}$

$R_3 \to -5R_2 + R_3$

(II) αR_j, $\alpha = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3R_1]{} \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(III) $R_i \leftrightarrow R_j$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ equivalenti per riga

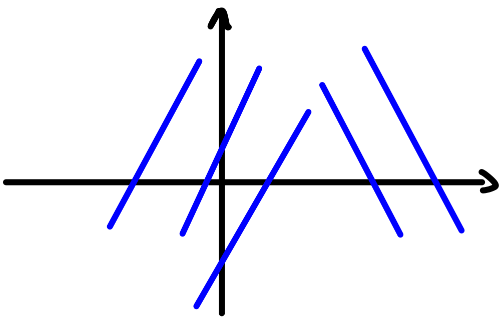
$A \sim B \sim C$

PROPOSIZIONE

In $\mathbb{R}^{m,n}$ essere equivalente per righe e' una relazione di equivalenza.

1/2 2/4 50/100 sono equivalenti

esercizio



$L \parallel L$ $\quad L_1 \parallel L_2$

$L_1 \parallel L_2$ $L_2 \parallel L_3 \Leftrightarrow L_1 \parallel L_3$

ogni matrice e' equivalente per riga a se stessa

PROPOSIZIONE

sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora A e' equivalente per righe a una matrice $A' \in \mathbb{R}^{m,n}$ ridotta per righe

TEOREMA

sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora A' e A'' sono due matrici ridotte per righe equivalenti per righe ad A. Quindi i numeri di righe di A' e A'' contenente entrate non nulle coincidono (tale numero dipende solo da A).

DEFINIZIONE DI RANGO

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e sia A' una matrice ridotta per righe di A, allora il numero di righe di A' contenente entrate non nulle viene detto il rango di A = $\text{Rank}(A) = \text{rg}(A)$

esempio

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to 2R_1 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$ 2 righe non nulle $\Rightarrow$ $rk(A) = rk(B) = 2$

- $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to 2R_1 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha $rk = 1$

ESERCIZIO

calcolare il $rk(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to -4R_1 + R_2 \\ R_3 \to -7R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \text{ non è ridotta } R_2 = -1/3\, R_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 6R_2 + R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è ridotta}$$

ESERCIZIO

determinare il $rk(A)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ non essendo ridotta per righe, si procede con trasf. elementari

$$1/3\, R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} R_3 \to -2R_2 + R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrice ridotta con $rk = 2$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

$rk(A) \le \min\{m, n\}$ dove $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\rightarrow$ utilizzo trasf. elementari

PROBLEMA

studiare il rango della matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2k \\ 1 & 1 & -k & 2k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$ al variare di k

SUGGERIMENTO: $1/2\, R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & -k & 2k \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -R_1 + R_3]{R_2 \to -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 1-k & 0 & k-2 \\ 0 & 1-k & 1-k & 2k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 1-k & 1-k & 2k-2 \\ 0 & 1-k & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

se $k \neq 1$, allora $Rk(C) = 3$

se $k = 1$, allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Rk(C) = 2$$

notizia

$Rk(A) = Rk({}^{T}A)$

sistemi di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} -3x + 6y = -9 \\ 3x + y = 1 \end{matrix} \quad 7y = -8 \quad y = -8/7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

m equazioni con n incognite

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \text{coefficienti}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \in \mathbb{R}^{n,1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

incognita   termini noti

$$A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1}$$

definizione

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ completa}$$

lemma

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{m,1}$

e $(A'|B')$ equivalente per righe a $(A|B)$, allora $AX=B$ e' equivalente a $A'X=B'$

teorema Rouché-Capelli

da sapere a memoria (domanda esame)

① il sistema $AX=B$ e' compatibile (ha almeno 1 soluzione) sse $rk(A|B)=rk(A)$

② se il sistema $AX=B$ e' compatibile, le sue soluzioni dipendono da $n-rk(A)$ parametri liberi

③ se il sistema e' compatibile e X_0 e' soluzione fissata, allora ogni altra soluzione e' della forma $X=X_0+Y$ dove Y appartiene all'insieme delle soluzioni del sistema $AX=0_{m\times 1}$

esempi

$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y-3z=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A|B} \sim \text{(equivalente)}$$

A (le prime tre colonne)

$R_1 \to -3R_2+R_1$; $R_3 \to -R_2+R_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad R_1 \Leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$rk(A)=3=rk(A|B)$ → sistema compatibile

n° incognite rango $3-3=0$ ⟶ parametri liberi soluzione secca

$$\begin{array}{l} x(-1/2) \\ x(1/3) \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right) R_1 \to -R_2+R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 4R_3+R_2} \begin{cases} 1+z=-1/2 \\ y=-7/6 \\ z=-2/3 \end{cases} \qquad (A|B) \leadsto (A'|B')$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -7/6 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$x = -1/2 - z = -1/2 - (-2/3)$$
$$x = -1/2 + 2/3 = 1/6$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -7/6 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

lezione 18/10/2023

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \Leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 2R_1 + R_3]{R_2 \to -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-1/3 R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to -3R_2 + R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{3\times 4}$$

matrice ridotta con $rk(A) = 2$, $rk(A|B) = 2$

Rouchè-Capelli:
- il sistema e' compatibile
- $n - rk(A) = 3 - 2 = 1$ n = numero di incognite
  (il sistema ha ∞^1 soluzioni)
  si cerca di trovarle

$$R_1 \to -R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A|B) = (A'|B')$$

$$x_1 - x_3 = -1/3 \qquad x_1 = -1/3 + x_3$$
$$x_2 - x_3 = -2/3 \qquad x_2 = -2/3 + x_3$$

$$S = \{(-1/3 + x_3, -2/3 + x_3, x_3) \,/\, x_3 \in \mathbb{R}\}$$ x_3 e' una libertà

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = 0 \to (-1/3, -2/3, 0) \\ x_3 = 1 \to (2/3, 1/3, 1) \end{array}\right\} \text{esempi}$$

$$= \{(-1/3, -2/3, 0) + x_3(1,1,1) \,/\, x_3 \in \mathbb{R}\}$$ si e' fattorizzato x_3

$$(-1/3, -2/3, 0) + (x_3, x_3, x_3)$$

se il sistema fosse

$$\begin{aligned}-2x_1+x_2+x_3&=0\\ x_1-2x_2+x_3&=0\\ x_1+x_2-2x_3&=0\end{aligned}$$

allora non bisogna calcolare perché

$$\bar{S}=\{x_3(1,1,1)\ x_3\in\mathbb{R}\}$$

esercizio

$$\begin{cases}-4x+2y+z=0\\ 3x-5y+z=1\\ 3x+y-2z=-1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-4&2&1&0\\3&-5&1&1\\3&1&-2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{-1/4R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1/2&-1/4&0\\3&-5&1&1\\3&1&-2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to -R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1/2&-1/4&0\\3&-5&1&1\\0&6&-3&-2\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}R_2\to-3R_1+R_2\\ 1/6R_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1/2&-1/4&0\\0&-7/2&7/4&1\\0&1&-1/2&-1/3\end{array}\right)\xrightarrow{2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1/2&-1/4&0\\0&-7&7/2&2\\0&1&-1/2&-1/3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to 7R_3+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1/2&-1/4&0\\0&0&0&-1/3\\0&1&-1/2&-1/3\end{array}\right)\quad Rk(A)=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1/2&-1/4&0\\0&1&-1/2&-1/3\\0&0&0&-1/3\end{array}\right)\quad Rk(A|B)=3$$

$\Rightarrow$ sistema incompatibile e non ha soluzioni perché $Rk(A)\neq Rk(A|B)$

esempio

$$\begin{cases}2x-2y+z+4t=0\\ x-y-4z+2t=0\\ -x+y+3z-2t=0\\ 3x-3y+z+6t=0\end{cases}$$

sistema omogeneo perché ha tutti i termini noti nulli
quando il sistema è omogeneo non è necessario scrivere gli ∅ in matrice

$$\begin{pmatrix}2&-2&1&4\\1&-1&-4&2\\-1&1&+3&-2\\3&-3&+1&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\to R_2+R_3\\ R_4\to-3R_2+R_4}]{R_1\to-2R_2+R_1}\begin{pmatrix}0&0&9&0\\1&-1&-4&2\\0&0&-1&0\\0&0&13&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-R_3\\ 1/13R_4}]{1/9R_1}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&-1&-4&2\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&1&-4&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$Rk(A)=2$
$Rk(A|B)=2$

$n-Rk(A)=4-2=2$ parametri liberi

$$\begin{cases}z=0\\ x-y-4z+2t=0\end{cases}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S = \{(y-2t, y, 0, t) \,/\, y,t \in \mathbb{R}\}$

$\{y(1,1,0,0); t(-2,0,0,1) \,/\, y,t \in \mathbb{R}\}$

∞^2

Tema d'esame

Trovare, se $\exists$, una relazione tra h_1, h_2, h_3 affinché il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = h_1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = h_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = h_3 \end{cases}$$

abbia soluzione. Determinare la soluzione quando $h_1 = -1$, $h_2 = 4$, $h_3 = 3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & h_1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & h_2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & h_3 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_3]{-R_1+R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & h_1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & h_2 - h_1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & h_3 - 2h_1 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2+R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & h_1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & h_2 - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 - h_2 - h_1 \end{array}\right)$$

$Rk(A) = 2$

secondo R-C affinché il sistema sia compatibile $Rk(A|B) = 2$

$h_3 - h_2 - h_1 = 0 \rightsquigarrow h_3 = h_1 + h_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1/5 R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_2+R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\infty^{4-2} = \infty^2$

$$\begin{cases} x + x_3 = 1 \\ x - x_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 1 + x_4 \end{array}$$

$S = \{(1-x_3, 1+x_4, x_3, x_4) \,/\, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$\{x_3(-1,1,0,0), x_4(0,1,0,1) \,/\, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

Esercizio

$$\begin{cases} -x - 2y + z = 0 \\ x + 3y - z = \alpha \end{cases} \qquad \text{al variare di } \alpha$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

$Rk(A) = 2 = Rk(A|B)$

∞^1 soluzione

$$\xrightarrow{2R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

$x - z = -2\alpha$

$y = \alpha$

$S = \{(z - 2\alpha, \alpha, \alpha, z) \,/\, \alpha \text{ fisso}, z \in \mathbb{R}\}$

ESERCIZIO x casa

STUDIARE IL SEGUENTE SISTEMA DI EQUAZIONI

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=2 \\ x-y=\alpha \end{cases}$$

α PARAMETRO

TEOREMA PER CALCOLARE L'INVERSA PIÙ VELOCEMENTE

$$\underset{2\times2}{(A} | \underset{2\times2}{B)} \rightsquigarrow (C | I)$$

esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SI PROCEDE CON TRASFORMAZIONI ELEMENTARI x AVERE LA id A SINISTRA

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_2+R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esercizio

$A^{-1} = ?$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \Leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-1/3 R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

METODO TRADIZIONALE x COMPROVARE

$$A^{-1} = 1/3 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0+3 = 3$

PER DIMOSTRARE CHE UN PRODOTTO È INVERTIBILE, BASTA DETERMINARE IL $\det(A \cdot B)$

INVERSA 3x3 METODO PIÙ BREVE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-3R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

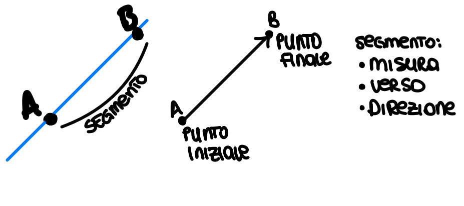
$$\xrightarrow[-3R_2+R_3]{R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[1/3R_3]{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1/3 \end{array}\right)$$

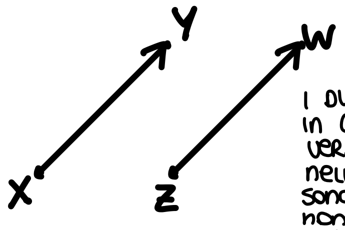
$$\xrightarrow{-2R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VETTORI

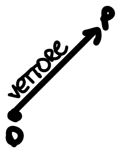
S_3 e' lo spazio euclideo. Nel punto A passano infinite rette. Se si ha AB, allora c'e' solo una retta. Il segmento e' dotato di misura, ha un verso e una direzione





I due segmenti hanno in comune misura, verso e direzione. Nello spazio euclideo sono due cose diverse, nonostante le caratteristiche in comune.

Scelta di un unico punto → vettori applicati / punto privilegiato



Questo e' un vettore applicato in "O"
- misura
- direzione
- verso

} completamente determinato

$|\vec{v}|$

$V_3(O) = \{\vec{OP} / P \in S_3, O \text{ fisso}\}$

S_3 lunghezza, direzione, verso

$\vec{v} = \vec{OP}$ $\quad \vec{OO} = \vec{0}$

Lezione 23/10/2023

Vettori applicati (in O)

La lunghezza di un vettore $\vec{v} = \vec{OP}$ si denoterà $|\vec{v}| = |\vec{OP}|$ ⇝ modulo del vettore

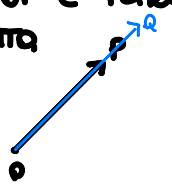
Quelli che hanno misura 1 si chiamano versori

Osservazione: $|\vec{v}| \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in V_3(O)$

In particolare $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

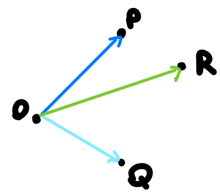
Definizione

Siano $\vec{OP}, \vec{OQ} \in V_3(O)$ il vettore $\vec{OP}$ e' parallelo al vettore $\vec{OQ}$ se i punti $O, P, Q \in S_3$ giacciono su una stessa retta



COMPLANARITÀ

Siano $\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR} \in V_3(O)$ si daranno complanari sse lo sono O, P, Q, R



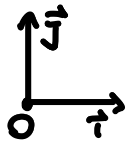
(tutti nello stesso piano)

SISTEMA DI COORDINATE NELLO SPAZIO S_3

"cartesiano ortogonale"

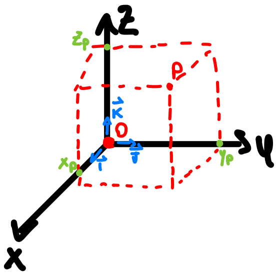
$O_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$

* O origine di S_3
* $\vec{i}, \vec{j}$ 2 versori applicati in O fra loro perpendicolari



* $\vec{k}$ versore applicato in O perpendicolare al piano che contiene sia $\vec{i}$ che $\vec{j}$ e tale che la terna $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sia orientata seguendo la regola della mano destra

$R^3 = \{ {}^t(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R} \}$



Osservazione

c'è una biezione tra le terne ordinate di $\mathbb{R}^3$ e i punti dello spazio S_3

$P(x, y, z) = P(x_P, y_P, z_P) \qquad V_3(O)$

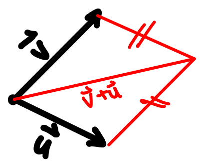
Ogni vettore $\vec{OP}$ rimane individuato da (x_P, y_P, z_P). Spesso lo si identifica con la matrice colonna $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

non confondere P con $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$

OPERAZIONI TRA VETTORI APPLICATI IN UN PUNTO

* legge del parallelogramma

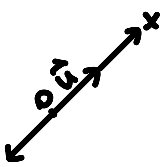


$\vec{v} + \vec{u}$

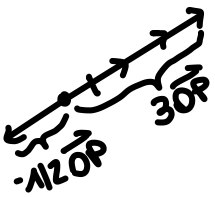
Sistema di riferimento (non dipende dalla scelta)

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} \qquad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_P + x_Q \\ y_P + y_Q \\ z_P + z_Q \end{pmatrix}$

* moltiplicazione per scalare



$\lambda \vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda x_P \\ \lambda y_P \\ \lambda z_P \end{pmatrix}$

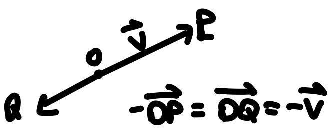


La moltiplicazione per scalare non dipende dalla scelta del sistema di riferimento

PROPOSIZIONE

In $V_3(O)$

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3) $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
4) $\forall \vec{v} \in V_3(O), \exists -\vec{v} \in V_3(O)$ tale che $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$



5) $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

6) $(\lambda+\mu)\cdot\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ $\qquad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

7) $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\cdot\vec{v}$

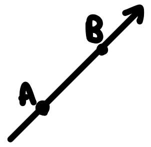
8) $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$

OSSERVAZIONE

$V_3(O)$ MUNITO DI QUELLE 2 OPERAZIONI COSTITUISCONO STRUTTURA DI 2 SPAZI VETTORIALI

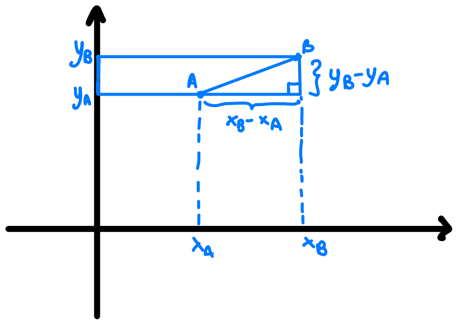
OSSERVAZIONE

SIANO $A(x_A, y_A, z_A)$ E $B(x_B, y_B, z_B)$



PITAGORA $|\vec{AB}| = d(A,B) =$

$\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$



$\vec{OA}$ $\quad O(0,0,0)$

$\qquad A(a,b,c)$

$d(O,P) = |\vec{OP}| \overset{DEF}{=} \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\vec{v} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

TEOREMA

SIA DATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE $O\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

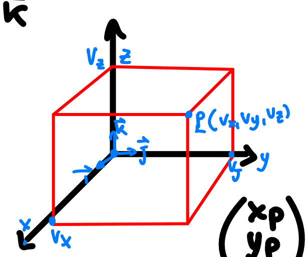
ALLORA $\forall \vec{v} \in V_3(O)$ ESISTONO UNICI $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$

NON E' POSSIBILE CONFONDERE $\vec{OP}$ CON P

OSSERVAZIONE

SE

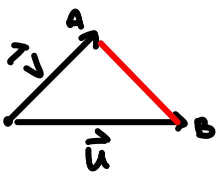
$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

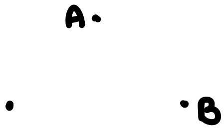
$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$

RISULTA CHE

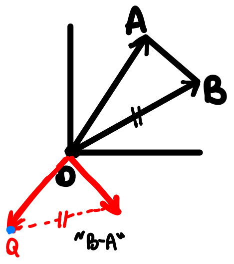
$\vec{v}+\vec{w} = (v_x+w_x)\vec{i} + (v_y+w_y)\vec{j} + (v_z+w_z)\vec{k}$

$\lambda\vec{v} = (\lambda v_x)\vec{i} + (\lambda v_y)\vec{j} + (\lambda v_z)\vec{k}$





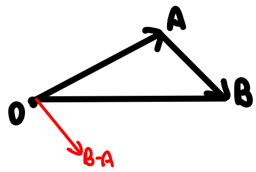
QUANDO SI HANNO TRE PUNTI, E' SICURO CHE SI TRATTA DELLO STESSO PIANO



$-\overrightarrow{OA}$

$\underbrace{\overrightarrow{OB} + -\overrightarrow{OA}}$

$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} \overset{def}{=} \overrightarrow{OB} + -\overrightarrow{OA} = B-A$



$\overrightarrow{O\ (B-A)}$

PROPOSIZIONE

$\vec{v}, \vec{w} \in V_3(\vec{O})$ $\vec{v} \neq \vec{0}$ ALLORA $\vec{v} \parallel \vec{w}$ SSE $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ T.C. $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}$

PROPOSIZIONE

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$ $\vec{v} \not\parallel \vec{w}$ ALLORA $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ SONO COMPLANARI SSE $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ T.C. $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

ESERCITAZIONE

SIANO I VETTORI APPLICATI IN O

$\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{k}$

1) $\vec{v} + \vec{w}$
2) $3\vec{v} - 2\vec{w}$
3) $|\vec{v}|$
4) $|\vec{v} - \vec{w}|$

1) $\vec{v} + \vec{w} = (2-1\vec{i}) + 3\vec{j} + (-5+2\vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$

2) $3\vec{v} - 2\vec{w} = 8\vec{i} + 9\vec{j} - 19\vec{k}$

$(6\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{k}) - (-2\vec{i} + 4\vec{k}) = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{k} + 2\vec{i} - 4\vec{k} = 8\vec{i} + 9\vec{j} - 19\vec{k}$

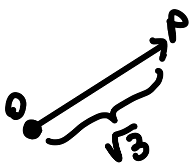
3) $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-5^2)} = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

4) $|\vec{v} - \vec{w}| = \sqrt{9+9+49} = \sqrt{67}$

$3\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$

ESERCIZIO

DETERMINARE UN VERSORE ASSOCIATO A $\vec{u}$ DOVE $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$



OSSERVAZIONE

$\forall v \in V_3(O) \setminus \{\vec{0}\}$ ESCLUSO

$\left| \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| = 1$ $\dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$

$\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}\right|$

$\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$

ESERCIZIO

PROVARE CHE
$\vec{v} = \vec{i}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ SONO COMPLANARI

$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ T.C. $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha + \beta = 1 \\ \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{matrix}$$

ESERCIZIO

SIANO $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j} + b\vec{k}$
$\vec{v} = (1-b)\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}$
$\vec{w} = b\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}$
TROVARE I VALORI DI a e b PER CUI $\vec{u} + \vec{v}$ E $\vec{w}$ HANNO LA STESSA DIREZIONE (PARALLELISMO)

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a+1-b \\ 2+b \\ b+2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \vec{u} + \vec{v} = \lambda \vec{w}$
$a+1-b = \lambda b$
$2+b = \lambda b$
$* \; b+2 = 2\lambda$

$\lambda b = 2\lambda \quad b = 2$

SI SOSTITUISCE IN $*$
$4 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 2$
SI SOSTITUISCE NELLA PRIMA OPERAZIONE
$a + 1 - 2 = 4 \Rightarrow a = 5$

PRODOTTO SCALARE

SISTEMA DI RIFERIMENTO $O_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ IN S_3 E SIANO $\vec{v}, \vec{w} \in V_3(O)$
$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$
$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$

SI DEFINISCE IL PRODOTTO SCALARE
$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$

$${}^t\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = (v_x, v_y, v_z) \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$
$\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$
$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 6 + 3 + 24 = 33$

OSSERVAZIONE

$<\vec{v},\vec{v}> = |\vec{v}|$

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

$v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y + v_z \cdot v_z = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$<\vec{v},\vec{v}> = |\vec{v}|^2$

$<\vec{i},\vec{i}> = <\vec{j},\vec{j}> = <\vec{k},\vec{k}>$

$<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}> = 1 = <\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}>$

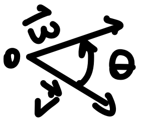
$<\vec{i},\vec{j}> = 0$

$<\vec{i},\vec{k}> = 0$

$<\vec{j},\vec{k}> = 0$

$<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}> = 0$

$<\vec{v},\vec{w}> = |\vec{v}||\vec{w}| \cdot \cos\theta$



$<\vec{v},\vec{w}> = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$

LEZIONE 25/10/2023

$\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{w} = -\vec{i} - 5\vec{k}$

$<\vec{v},\vec{w}> = 2 \cdot -1 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot -5 = -22$

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$

$<\vec{v},\vec{w}> = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z$

$<,> : V_3(O) \times V_3(O) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{v},\vec{w}) \longrightarrow <\vec{v},\vec{w}>$

$<\vec{v},\vec{v}> = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \leadsto |\vec{v}|^2$

$<\vec{v},\vec{v}> \geq 0$

$<\vec{v},\vec{0}> = 0$

$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

PROPRIETA' DEL PRODOTTO SCALARE

PROPOSIZIONE:

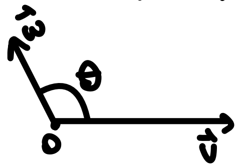
1) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ COMMUTATIVA
2) $\langle \vec{u}, \vec{v}+\vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
   OPPURE $\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
3) $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle$

TEOREMA: COEFFICIENTI DI FOURIER

$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ *

$\vec{v}$ SI SCRIVE COME COMBINAZIONE LINEARE IN MODO UNICO COME *
DOVE: $v_x = \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle$; $v_y = \langle \vec{v}, \vec{j} \rangle$; $v_z = \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle$

OSSIA: $\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{v}, \vec{j} \rangle \vec{j} + \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle \vec{k}$



ANGOLO TRA I VETTORI $\vec{v}$ E $\vec{w}$

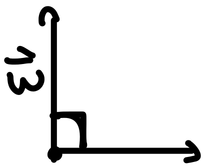
$\theta = \widehat{\vec{v}, \vec{w}}$

TEOREMA

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}, \vec{w}}$

$\cos \widehat{\vec{v}, \vec{w}} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ $\quad$ $\vec{v} \neq 0$, $\vec{w} \neq 0$ $\quad$ $\cos\theta = 0{,}43$; $\arccos 0{,}43 = \theta$

OSSERVAZIONE



$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}| \cdot \cos \widehat{\vec{v}, \vec{w}}$

SI OTTIENE IL TEOREMA SOTTOSTANTE.

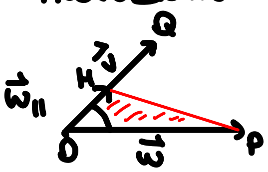
TEOREMA

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$

CAUCHY-SCHWARZ

$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}||\vec{w}|$

PROIEZIONE ORTOGONALE



$\overrightarrow{OH} = \vec{w}_{\parallel}$ (def)

$\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$; $\vec{w} = \overrightarrow{OP}$
CHI È $\overrightarrow{OH}$?
ΔOHP RETTANGOLO IN H

$\cos\theta$ = CATETO ADIACENTE / IPOTENUSA = $\overrightarrow{OH} / \overrightarrow{OP} = |\vec{w}_{\parallel}| / |\vec{w}|$

$\vec{w}_{\parallel}$ $\quad |\vec{w}| \cdot \cos\theta$ VERSORE$(\vec{v})$ $\quad \cos\theta = |\vec{w}_{\parallel}| / |\vec{w}|$ $\quad$ VERS$(\vec{v}) = \vec{v} / |\vec{v}|$

$|\vec{w}|\cdot \cos\theta \,\text{VERS}(\vec{v}) = |\vec{w}||\vec{v}|\cos\theta\,\text{VERS}(\vec{v})/|\vec{v}| = \langle \vec{v},\vec{w}\rangle/|\vec{v}|\cdot \vec{v}/|\vec{v}| = \dfrac{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle}{|\vec{v}|^2}\cdot\vec{v}$

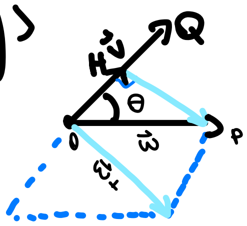
$= \langle \vec{v},\vec{w}\rangle/\langle \vec{v},\vec{v}\rangle\cdot\vec{v}$ SI PUO' CALCOLARE LA POSIZIONE

ESERCIZIO

DETERMINARE LA PROIEZIONE ORTOGONALE $\vec{w}_{\parallel}$ DI $\vec{w}$ LUNGO LA DIREZIONE DI $\vec{v}$ ESSENDO $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ E $\vec{w}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

$$\frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = \frac{1\cdot1+1\cdot-2+-1\cdot3}{1+1+1}\cdot\vec{i},\vec{j},\vec{k} = -\frac{4}{3}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$$

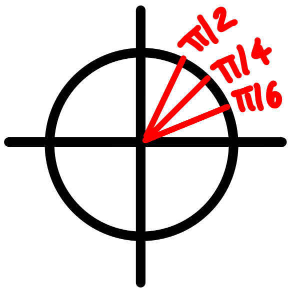
$\vec{w}-\vec{w}_{\parallel}=\vec{w}_{\perp}$



ESERCIZIO

TROVARE L'ANGOLO TRA I VETTORI $\{\vec{i},\vec{i}+\vec{j}\}$

RISPOSTA: $\cos\theta=\dfrac{\langle\vec{i},\vec{i}+\vec{j}\rangle}{|\vec{i}||\vec{i}+\vec{j}|}$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$

$\sqrt{1^2+1^2+0}=\sqrt{2}$

$$\frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ESERCIZIO

TROVARE L'ANGOLO $\{\vec{i}+\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\}$

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \theta=\pi/3$$

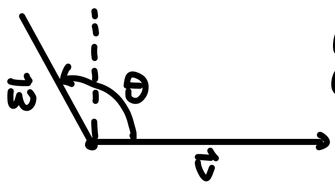
ESERCIZIO

CALCOLARE $|\vec{u}+\vec{v}|^2$

RISPOSTA $|\vec{u}+\vec{v}|^2=\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle=\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}\rangle+\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{v}\rangle=\langle\vec{u},\vec{u}\rangle+\langle\vec{v},\vec{u}\rangle+\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=$
$|\vec{u}|^2+2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+|\vec{v}|^2$

PROVARE CHE $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+|\vec{v}|^2$

IL PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI E' UN NUMERO $\in\mathbb{R}$



$\cos\theta=0$ $\perp$
$\cos\theta<0$ OTTUSO
$\cos\theta>0$ ACUTO

PRODOTTO VETTORIALE

FISSATO SISTEMA DI RIFERIMENTO $O_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ IN S_3

SIANO $\vec{v},\vec{w} \in V_3(O)$

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$

DEFINIZIONE

$$\vec{v}\times\vec{w} = (v_y \cdot w_z - v_z w_y)\vec{i} - (v_x w_z - v_z w_x)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k}$$

ARTIFICIO $\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$

ESEMPIO

$\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$-1\cdot -5 - 1\cdot 1 = 4\vec{i}$

$2\cdot -5 - 1\cdot 1 = -11\vec{j}$

$2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3\vec{k}$

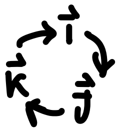
$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

ES: $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$

$$\vec{i}\times\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$$

$$\vec{i}\times\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j}$$



$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$

PROPOSIZIONE

IN $V_3(O)$

1) $\vec{v}\times\vec{w} = -\vec{w}\times\vec{v}$
2) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$
3) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$
4) $\lambda(\vec{v}\times\vec{w}) = \lambda\vec{v}\times\vec{w} = \vec{v}\times\lambda\vec{w}$

CONTROESEMPIO

$$(\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{j} \neq \vec{i}\times\underbrace{(\vec{i}\times\vec{j})}_{\vec{i}\times\vec{k}}$$

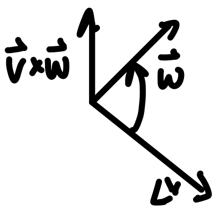
OSSERVAZIONE

$\vec{v}\times\vec{0}=\vec{0}$

TEOREMA

IN S_3 sr $O_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ $\vec{v}\times\vec{w}\in V_3(O)$, $\vec{v}\times\vec{w}$ E' IL VETTORE CARATTERIZZATO DA:

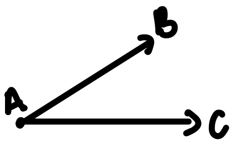
1) LA SUA DIREZIONE E' $\perp$ AL PIANO CONTENUTO $\vec{v}$ E $\vec{w}$ $(\vec{v}\times\vec{w}\perp\vec{v} \wedge \vec{v}\times\vec{w}\perp\vec{w})$
2) IL SUO VERSO E' TALE CHE LA TERNA ORDINATA $(\vec{v},\vec{w},\vec{v}\times\vec{w})$ SIA ORIENTATA SECONDO LA REGOLA DELLA MANO DESTRA



3) LA LUNGHEZZA $|\vec{v}\times\vec{w}|=|\vec{v}||\vec{w}|\cdot\sin\theta$

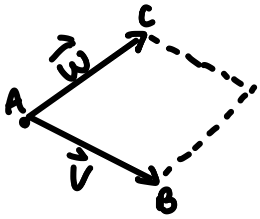
APPLICAZIONI

IN S_3

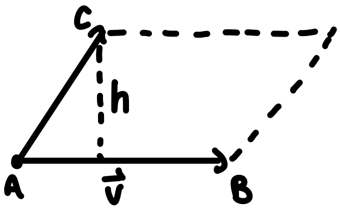


O

$B-A$ $\vec{AB}$
$C-A$ $\vec{AC}$



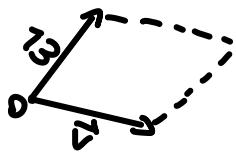
$B-A$ $\vec{AB}$
$C-A$ $\vec{AC}$



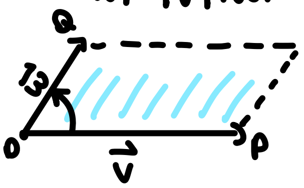
AREA # = base × altezza
$=|\vec{v}|\cdot h$
$\sin\theta = \dfrac{\text{CATETO OPPOSTO}}{\text{IPOTENUSA}} = \dfrac{h}{\vec{AC}}$

$h=\vec{AC}\cdot\sin\theta=|\vec{w}|\cdot\sin\theta$

L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA $|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\sin\theta$ E' $|\vec{v}\times\vec{w}|$



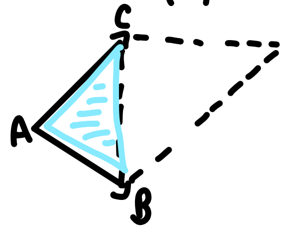
$|\vec{v}\times\vec{w}|=|\vec{v}||\vec{w}|\sin\theta$



IL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE RAPPRESENTA L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA CHE HA COME LATI I VETTORI MEDESIMI

ESEMPIO

NELLO SPAZIO SIANO DATI $A(0,1,0)$, $B(1,2,1)$ E $C(0,2,-1)$. DETERMINARE L'AREA DEL Δ DI VERTICI A, B, C.



$A\Delta ABC = 1/2\, |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|$

$\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (1,1,1) = \overrightarrow{O(B-A)}$

$\vec{w} = \vec{AC} = C - A = (0,1,-1)$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

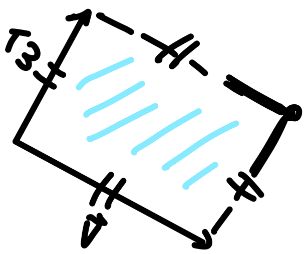
AREA $= 1/2 \cdot \sqrt{6}$

LEZIONE 30/10/2023

PRODOTTO VETTORIALE

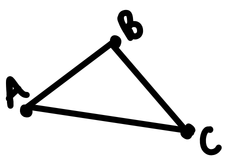
1) $\langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w} \rangle$
2) $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$
3) $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin\theta$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} V_y W_z - V_z W_z \\ -V_x W_z + V_z W_x \\ V_x W_y - V_y W_x \end{pmatrix}$$



$A, B, C \in S_3$ NON ALLINEATI

area del triangolo ABC



$B - A = \vec{AB}$

$C - A = \vec{AC}$

$1/2\, |B - A \times C - A$

ESERCIZIO

SIANO I PUNTI DI S_3

$A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$

- PROVARE CHE I PUNTI NON SONO ALLINEATI
- TROVARE L'AREA DEL TRIANGOLO ABC

• SI FISSA UN QUALSIASI PUNTO (A)

B - A = $\vec{v}$

C - A = $\vec{w}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{i} + \vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ $\quad \lambda = 1,\ 1 = 0,\ \lambda = 0$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ AREA DEL PARALLELOGRAMMA

$1/2 \cdot \sqrt{3}$ AREA DEL TRIANGOLO

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

$\vec{v} \parallel \vec{w}$ $\quad \exists \lambda :$ $w_x = \lambda v_x$

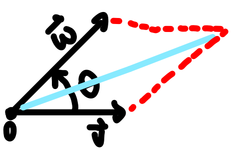
$w_y = \lambda v_y$

$w_z = \lambda v_z$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \lambda v_x & \lambda v_y & \lambda v_z \end{vmatrix}$$

$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ SSE $\vec{v} \parallel \vec{w}$

PROBLEMA



TROVARE IL VETTORE

$$\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} \qquad \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w}$

PRODOTTO MISTO

IN S_3 $O\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

$\vec{u}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}$
$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$
$\vec{w}=w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k}$

SI DEFINISCE IL PRODOTTO MISTO $\langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$

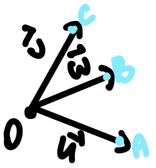
$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle = u_x\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - u_y\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + u_z\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

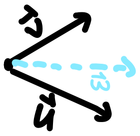
ESERCIZIO

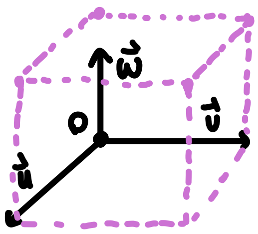
SIANO I VETTORI
$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
CALCOLARE $\langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle$

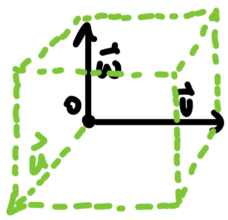
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) = 5$$



I PUNTI O,A,B,C SONO COMPLANARI



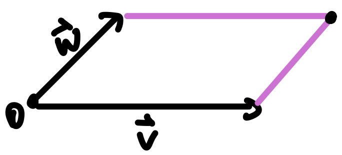


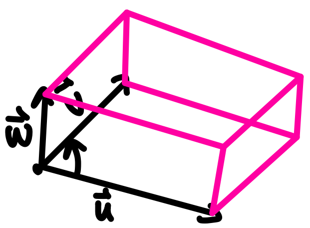


PROPOSIZIONE

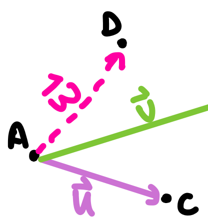
$|\langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle|$ RAPPRESENTA IL VOLUME CHE GENERANO I VETTORI APPLICATI (IN O) $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

ESTENSIONE NATURALE DEL SIGNIFICATO DEL MODULO DEL P. VETTORIALE





OSSERVAZIONE



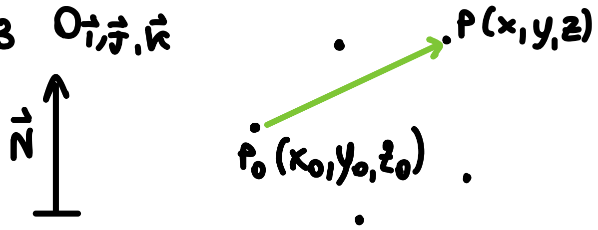
IN S_3 PROPOSIZIONE: I PUNTI A, B, C, D SARANNO COMPLANARI SSE
$|\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle| = 0$

$|\langle \vec{AB}, \vec{AC} \times \vec{AD} \rangle| = 0$

C-A
B-A
D-A

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

$S_3 \quad O \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



π = PIANO PI GRECO

$\vec{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$

$\langle \vec{P_0P}, \vec{N} \rangle = 0$

$\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \rangle = 0$

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$
$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$

$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \quad \pi$

EQUAZIONE NEL PIANO π CONTENENTE P_0 E ORTOGONALE AL VETTORE $\vec{N}$

ESEMPIO

DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL PIANO π CHE CONTIENE IL PUNTO $A(-1,2,3)$ ORTOGONALE AL VETTORE
$\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

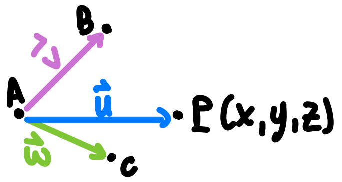
$x + 2y - 3z + d = 0$

PER SCOPRIRE d, SI IMPONE IL PASSAGGIO PER A

$-1 + 2(2) - 3 \cdot 3 + d = 0$
$-1 + 4 - 9 + d = 0$
$-6 + d = 0 \quad d = 6$

$\pi : x+2y-3z+6=0$

EQUAZIONE DEL PIANO CHE CONTIENE TRE PUNTI NON ALLINEATI



$A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

ESEMPIO

TROVARE L'EQUAZIONE DEL PIANO π CHE PASSA PER I PUNTI $A(1,1,1)$; $B(1,0,-2)$; $C(0,-2,-3)$

$P(x,y,z)$ TC $\langle P-A, B-A \times C-A \rangle = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)(-11)-(y-1)(-3)+(z-1)(-1)=0$
$-11x+11+3y-3-z+1=0$
$-11x+3y-z+9$
$11x-3y+z-9=0$ π VERIFICATO A

$11-0+-2-9=0$ VERIFICATO B

$6+3-9=0$ VERIFICATO C

$\vec{N} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{N} \perp \pi$ $\vec{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE

$\pi_1 : ax+by+cz+d=0$ $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ ALLORA $\pi_1 \perp \pi_2$

$\pi_2 : a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0$

OSSERVAZIONE

SI SUPPONE CHE $\pi \neq \pi'$ (ALTRIMENTI BANALE)

$\pi : ax+by+cz+d=0$

$\pi' : a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\pi // \pi' \iff \vec{N}_1 // \vec{N}_2 \iff \vec{N}_2 = \alpha \vec{N}_1$

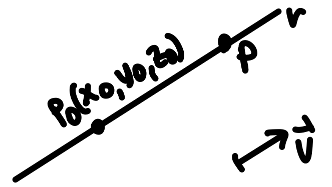
DEFINIZIONE

L'INTERSEZIONE DI DUE PIANI π_1, π_2 E' UNA RETTA PURCHÉ π_1 NON SIA PARALLELO A π_2
UNA RETTA E' QUINDI DEFINITA COME UN SISTEMA DI DUE EQUAZIONI A TRE INCOGNITE

$L: \pi_1 \cap \pi_2 \quad \pi_1 \not\parallel \pi_2$

$$L: \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA



$\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$

$P = P_0 = t\vec{v}$

$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} \quad t \in \mathbb{R}$ (SCALARE)

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tl \\ tm \\ tn \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO

EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA PASSANTE PER A(-3,5,7) E NELLA DIREZIONE DI $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = -3 + (-1 \cdot t) \\ y = -5 + (3 \cdot t) \\ z = -7 + (-5 \cdot t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO

DETERMINARE EQ. PARAMETRICHE DELLA RETTA PASSANTE PER I PUNTI A(2,-2,2) E B(1,0,-4)

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

direzione della retta: $B - A \nearrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

lezione 6/11/2023

esercizio

trovare equazioni parametriche della retta passante per il punto $A(-3,5,7)$ e nella direzione di $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{cases} x = -3 + (-1)\cdot t \\ y = 5 + 3t \\ z = 7 + (-5)\cdot t \end{cases}\right\} t \in \mathbb{R}$$

esercizio

determinare equazioni parametriche della retta passante per i punti $A(2,-2,2)$ e $B(1,0,-4)$

$$\left.\begin{cases} x = 2 - 1t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 \underbrace{- 6t} \end{cases}\right\} t \in \mathbb{R}$$

per trovare la direzione di $B - A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

esercizio

retta passante per l'origine $O(0,0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = {}^t(1,1,1)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

esercizio

determinare l'equazione della retta passante per $P(3,5,-2)$ e $Q(1,0,-3)$

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 - 5t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

la direzione si trova facendo $\vec{v}(1-3, 0-5, -3-(-2))$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1\cdot x - 1\cdot y + 0\cdot z + 0 = 0 \\ 1\cdot x + 0\cdot y - 1\cdot z + 0 = 0 \end{cases}$$

retta esprimibile anche come intersezione di 2 piani

esercizio

$$\begin{cases} \pi_1 = x + 2y - z = 0 \\ \pi_2 = x + y - 3 = 0 \end{cases}$$ sono paralleli?

$\vec{N}_1 = {}^t(1,2,-1)$
$\vec{N}_2 = {}^t(1,1,0)$

non sono // perciò si intersecano lungo una retta

$r\ \pi_1 \cap \pi_2 \qquad \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases} \quad A(6,-3,0) \qquad r.\begin{cases} x = 6 + t \\ y = -3 - t \\ z = 0 - t \end{cases}$

Tema d'esame

Si considerino i piani $\pi_1: ax+y-2z=0$ e $\pi_2: y+z+2b=0$ e $\pi_3: 2x+y+2z=1$. Trovare i valori di a e b per cui la retta $\pi_1 \cap \pi_2$ è parallela al piano π_3.

$\vec{N}_{\pi_1}=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{N}_{\pi_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non sono paralleli perché $\lambda\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

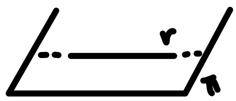
$$\vec{N}_{\pi_1}\times\vec{N}_{\pi_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -a \\ a \end{pmatrix}=3\vec{i}-a\vec{j}+a\vec{k}$$

$\vec{N}_{\pi_3}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ $\quad 6-a+2a=0,\ 6a+a=0,\ a=6$

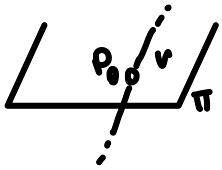
in questo modo r è $\perp$ a π_3

b è libero (bisogna scriverlo)

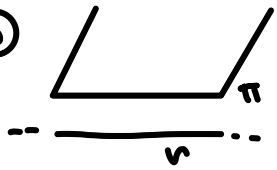
Posizione tra piano e retta

① 

r giace sul piano

② 

$r \cap \pi = \{P_0\}$

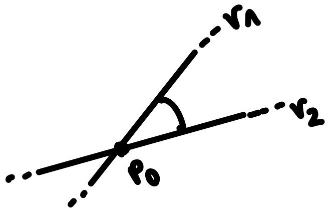
③ 

$\pi \cap r = \{0\}$

Posizione relativa tra 2 rette nello spazio

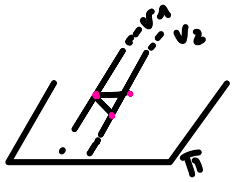
$r_1 \neq r_2$

① $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ cioè sono incidenti in P_0



c'è sempre un piano che le contiene

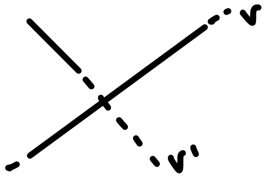
② $r_1 // r_2$



c'è sempre un piano che le contiene

Definizione

r e r' si definiscono rette sghembe se e solo se non esiste alcun piano che le contiene (né parallele né incidenti)



ESERCIZIO

Siano

$r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}$ e $r': \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ z=3 \end{cases}$ VERIFICARE SE SONO SGHEMBE

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ DIREZIONE DI r

DIREZIONE DI r': $\vec{N}_{\pi_1} \times \vec{N}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r \nparallel r'$ NON SONO PROPORZIONALI

$r': \begin{cases} x=-2+t' \\ y=0-t' \\ z=3+0t' \end{cases}$

$x+y+3-1=0,\ x+y=-2$ SE $y=0 \to x=-2$ $\alpha(-2,0,3)$

$r \cap r' \leadsto \begin{cases} 1=-2+t' \\ 1+t=-t' \\ -t=3 \end{cases} : \begin{cases} t'=3 \\ 1-3=-3 \\ t=-3 \end{cases}$ $-2 \neq -3$ $r \cap r' \neq \emptyset$

ESERCIZIO

VERIFICARE CHE LE SEGUENTI RETTE SONO SGHEMBE

$(x,y,z) = (2+t, -1-t, 4+3t)$

$(x,y,z) = (3+t, 2+t, 1+t)$

$r: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x=3+t' \\ y=2+t' \\ z=1+t' \end{cases}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ DIREZIONE DI r $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ DIREZIONE DI s $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ NON $\exists \lambda$ $r \nparallel s$

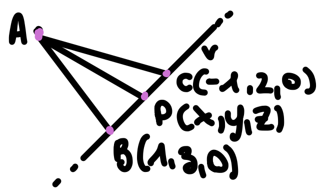
$r \cap s$ $\begin{cases} 2+t=3+t' \\ -1-t=2+t' \\ 4+3t=-1+t' \end{cases} ; \begin{cases} t'=-2 \\ 2+t=3-2 \\ 1 \neq -1 \end{cases}$ $t=-1$ $r \cap s = \emptyset$ NON SONO INCIDENTI

$\downarrow$ SI SOMMA LA 1ª EQ CON LA 2ª EQ $1=5+2t'$ $t'=-2$

ESERCIZIO

TROVARE L'EQUAZIONE DEL PIANO CHE CONTIENE $A(1,2,1)$ E LA RETTA

$r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3+t \\ z=0 \end{cases}$



$\langle \vec{AP}, \vec{AB} \times \vec{AC} \rangle = 0 \leadsto \langle P-A, B-A \times C-A \rangle = 0$ $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$(x-1)(-1)-(y-2)(-2)+(z-1)\cdot 2=0$

$-x+2y+2z-5=0$, $x-2y-2z+5=0$ equazione del piano π

$\vec{N}_{\pi}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ non passa per l'origine perché $d\neq 0$, $5\neq 0$

Distanze

- $P=(x_1,y_1,z_1)$ $Q=(x_2,y_2,z_2)$ distanza tra 2 punti

  $d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

- $P(x_0,y_0,z_0)$ $\pi: ax+by+cz+d=0$

Lezione 8/11/2023

ESERCIZIO

1. $P(1,-1,2)$ $\qquad Q-P=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$
2. $Q(2,3,4)$

a) Trovare la retta che determina P e Q
b) Stabilire se $R(-1,2,-2)$ appartiene alla retta $r=\overline{PQ}$
c) Determinare l'eq. del piano che contiene i punti P, Q ed $S(0,1,1)$
d) Determinare l'area del ΔPQS
e) Determinare la distanza $d(P,Q)$
f) Dire se l'origine appartiene al piano determinato dai punti PQS
g) Determinare il volume del parallelepipedo generato dai vettori $\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OS}$

a) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+4t \\ z=2+2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

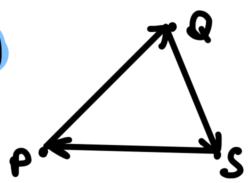
b) $\begin{cases} -1=1+t \\ 2=-1+4t \\ -2=2+2t \end{cases} \Rightarrow t=-2$, $2=-1-8$, $R\notin r$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$ $\qquad S(0,1,1)$

$(x-1)(-8)-(y+1)(1)+(z-2)(6)=0$
$-8x+8-y-1+6z-12=0$
$-8x-y+6z-5=0$
$8x+y-6z+5=0$

$\vec{N}_\pi=\begin{pmatrix}8\\1\\-6\end{pmatrix}$

d)



$1/2\,|\vec{PS}\times\vec{PQ}|$

$1/2\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\\-6\end{pmatrix}$

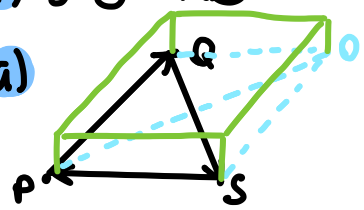
$1/2\,|\sqrt{64+1+36}| = 1/2\,|\sqrt{101}|$

e) $d(P,Q)$

$\sqrt{1^2+4^2+2^2}=\sqrt{21}$

f) $S=0$ NO

g)



$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)+1(2)+2(2)=5$

$\langle \vec{OP}, \vec{OQ}\times\vec{OS}\rangle$

ESERCIZIO

a) Determinare il piano passante per i punti $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$

b) Determinare l'area del $\triangle ABC$.

c) Determinare la distanza dell'origine al piano appena trovato.

d) Determinare il volume del tetraedro che forma $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$

a) Si fissa A

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(1)-(y-0)(-1)+(z-0)(1)=0$$
$$x-1+y+z=0$$
$$x+y+z=0$$

$$\vec{N}_\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

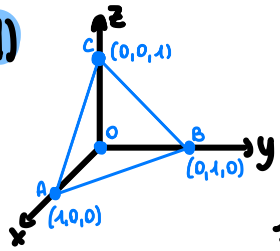
b) $1/2\,|\vec{AB}\times\vec{AC}| = 1/2\,\sqrt{3}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $d(O,\pi) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\frac{|1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

d)

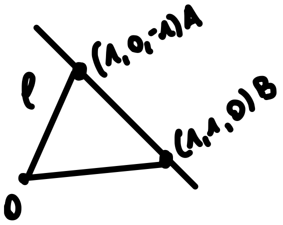


$$\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = 1$$

$$\frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

ESERCIZIO

Determinare l'equazione del piano che contiene la retta $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$ e passante per l'origine.



$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

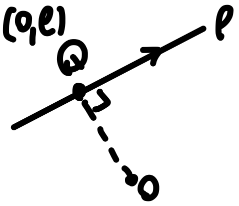
$$x\cdot 1 - y\cdot 1 + z\cdot 1 = 0$$
$$x-y+z=0$$

Sia α il piano perpendicolare a ℓ passante per l'origine

$$ax+by+cz+d \overset{\alpha}{=} 0$$
$$0x+1y+1z=0$$
$$y+z=0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=t \\ y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 1+t+t&=0 \\ 2t&=-1 \\ t&=-1/2 \end{aligned}$$

$d(O,\ell)$



$Q(1,1/2,-1/2)$

$d(O,\ell)=d(O,Q)$

$$\sqrt{1^2+(1/2)^2+(-1/2)^2} = \sqrt{1+1/4+1/4}$$

$$d(O,\ell) = \frac{|P-O\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

ESERCIZIO

Siano le rette $r: \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x-y=0 \\ z=3 \end{cases}$

Vedere se le rette sono complanari o meno.
$d(r,s)=?$

$\vec{v}$ vettore ortogonale a π_1
$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{w}$ vettore ortogonale a π_2
$\vec{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Direzione retta $r: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$z=0$
$x+y=1$
$2x-y=0$

$3x=1$
$x=1/3$
$y=1-1/3=\frac{2}{3}$

$$r: \begin{cases} x=1/3 \\ y=2/3+t \\ z=t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$$

Direzione di r: $\vec{d}_r=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Direzione di s: $\vec{d}_s=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

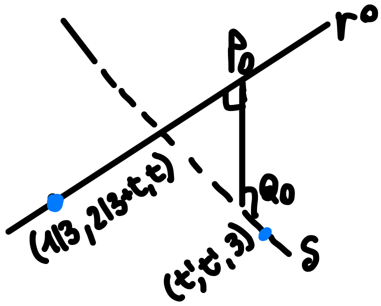
$r // s$?

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ non parallele

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3} &= t' \\ \frac{2}{3}+t &= t' \\ t &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$r \cap s = \emptyset$
rette sghembe (non $\nexists$ piano che le contiene)

$d(r,s) = \inf\{d(P,Q) / P \in r, Q \in s\}$



$P_0 - Q_0 \perp r^\circ$ $\qquad$ $\overrightarrow{P_0Q_0} \perp r^\circ$

$P_0 - Q_0 \perp s$ $\qquad$ $\overrightarrow{P_0Q_0} \perp s$

$\langle (1/3 - t', 2/3 + t - t', t-3), (0,1,1) \rangle = 0$

$\langle (1/3 - t', 2/3 + t - t', t-3), (1,1,0) \rangle = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2/3 + t - t' + t - 3 = 0 \\ 1/3 - t', 2/3 + t - t' = 0 \end{array}}$$

- $2t - t' = 3 - 2/3$

  $2t - t' = 7/3$
- $t - 2t' = -1$

$\begin{cases} 2t - t' = 7/3 \\ t - 2t' = -1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} -4t + 2t' = -14/3 \\ t - 2t' = -1 \end{cases}$ $\qquad$ $-3t = -17/3$ $\qquad$ $t = 17/9$

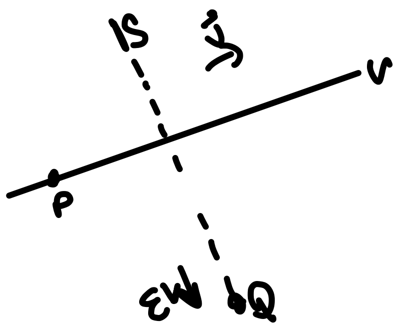
$t' = -7/3 + 34/9 = \dfrac{-21+34}{9} = 13/9$

$P_0(1/3, 2/3 + 17/9, 17/9)$

$Q_0(13/9, 13/9, 3)$

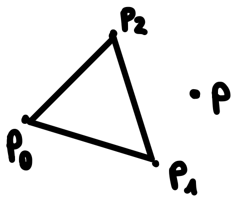
$d(r,s) = d(P_0, Q_0)$

$\sqrt{(13/9 - 1/3)^2 + (13/9 - 2/3 - 19/9)^2 + (3 - 17/9)^2}$



$$\frac{\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

ESERCIZIO



$\langle \overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = 0$

$P(x,y,z)$ $\quad$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad$ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $\quad$ $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$\det({}^tA) = \det A$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = s\underbrace{\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \\ z_1-z_0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} + t\underbrace{\begin{pmatrix} x_2-x_0 \\ y_2-y_0 \\ z_2-z_0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$$

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ COMPLANARI SSE $\vec{u} = s\vec{v}+t\vec{w}$

OSSIA

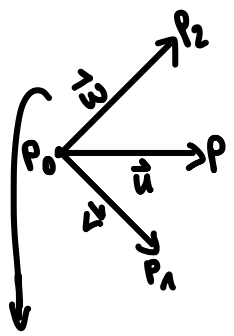
$$x-x_0 = s(x_1-x_0)+t(x_2-x_0) \qquad s,t \in \mathbb{R}$$
$$y-y_0 = s(y_1-y_0)+t(y_2-y_0)$$
$$z-z_0 = s(z_1-z_0)+t(z_2-z_0)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + s(x_1-x_0)+t(x_2-x_0) \\ y = y_0 + s(y_1-y_0)+t(y_2-y_0) \\ z = z_0 + s(z_1-z_0)+t(z_2-z_0) \end{cases} \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \\ z_1-z_0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} x_2-x_0 \\ y_2-y_0 \\ z_2-z_0 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} \nparallel \vec{w}$ $\quad$ $\vec{v}$ e $\vec{w}$ SONO PARALLELI AL PIANO



$\vec{u} = t\vec{v}+s\vec{w}$

EQUAZIONI PARAMETRICHE PIANO CONTENENTE $A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$
SI FISSA A

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x = 1 - s - t \\ y = 0 + s \\ z = 0 + t \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = 1 - s - t \\ y = s \\ z = t \end{matrix} \qquad x = 1 - y - z \Rightarrow x+y+z-1=0$$

LEZIONE 10/11/2023

ES. 1

VERIFICARE CHE $\pi_1 // \pi_2$. SCRIVERE LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA RETTA $r \perp$ A π E PASSANTE PER IL PUNTO A.

$\pi_1: 3x - y + z = 0$

$\pi_2: -6x + 2y - 2z = 7$

$A(3,-2,5)$

INOLTRE DETERMINARE $d(\pi_1, \pi_2)$

$ax+by+cz+d=0$ TUTTI I PIANI NELLO SPAZIO HANNO QUESTA EQUAZIONE

$\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

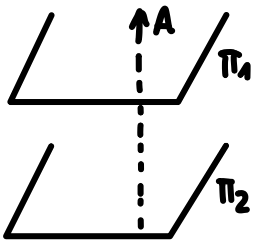
$\vec{N} \perp \pi$

$\vec{N}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{N}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\exists \ \lambda = -2$ tc $\vec{N}_2 = -2\vec{N}_1$

$\dfrac{|d-d''|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad d=0, \ d'=-7$

$\pi_2 : 3x-y-z=-7/2$
$\pi_2 : 3x-y-z+7/2=0$
$d'' = \frac{7}{2}$



$d = \dfrac{|0-7/2|}{\sqrt{9+1+1}} = \dfrac{7/2}{\sqrt{11}} = \dfrac{7}{2\sqrt{11}}$

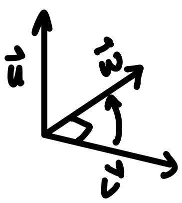
$r^\circ : \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3+3t \\ y=-2-t \\ z=5+t \end{cases}$
$t \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 2

Siano
$\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$
$\vec{w} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

a) determinare un vettore $\perp$ ad entrambi
b) determinare se e' $\measuredangle$ formato tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e' acuto, ottuso o retto

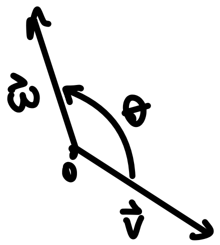
$\vec{v} \times \vec{w} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\vec{i} + \vec{k}$



$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}||\vec{w}|}$

$1\cdot -1 + -2\cdot 3 + -1\cdot 1$
$-1-6-1=-8<0$



$=0$ retto
>0 acuto
<0 ottuso

Esercizio 3

$$\begin{cases} \pi_1: x+2y=1 \\ \pi_2: -x+y+3z=2 \\ \pi_3: 6y+6z=k \end{cases}$$

k parametro reale

Risolvere il sistema di equazioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & k \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{matrice completa}$$

↓
studiare i ranghi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-6 \end{array}\right)$$

$rk(A)=2$
$rk(A|B)=2$

Il sistema è compatibile sse $k=6$. Se $k\neq 6$ il sistema non è compatibile

3bis) Risolvere il sistema con $k=6$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

$\infty^{3-2}=\infty^1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x-2z=-1 \qquad x=-1+2z$
$y+z=1 \qquad y=1-z$

3tris) Interpretare geometricamente le soluzioni con $z=t$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=t \end{array}\right\} t\in\mathbb{R}$$

L'insieme delle soluzioni con $k=6$ rappresenta i punti di una retta ℓ che passa per $P_0(-1,1,0)$ e che ha per direzione $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x-2z \overset{\alpha}{\underset{\beta}{=}} -1 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1+2z \\ y=1-z \end{cases}$$

$$S=\{(-1+2z, 1-z, z) / z\in\mathbb{R}\}$$

ESERCIZIO 4

VERIFICARE CHE LE RETTE

$$r^{\circ}\begin{cases} x-y+z=0 \\ y+3z=0 \end{cases} \quad e \quad s^{\circ}\begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \\ z=1+t \end{cases}$$

SIANO SGHEMBE

1) $r\cap s=\emptyset$
2) $\vec{d}_r \not\parallel \vec{d}_s$

$z=t$
$x-y+t=0 \quad \Rightarrow x=y-t$
$y=-3t \qquad x=-3t-t=-4t$

$$\left.\begin{array}{l} x=-4t' \\ y=-3t' \\ z=t' \end{array}\right\} t\in\mathbb{R}$$

$$\vec{d}_r=\begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_s=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ non sono parallele, allora $r^{\circ}\not\parallel s$

$-4t'=3+t$
$-3t'=2+t$
$t'=1+t$

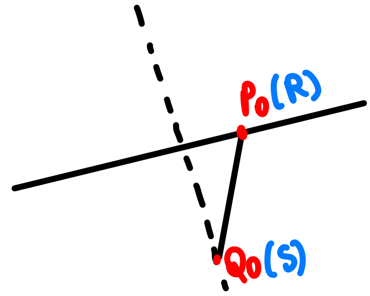
$-4(1+t)=3+t$
$-4-4t=3+t \Rightarrow -5t=7 \quad t=-7/5$

$t'=1-7/5=-2/5$
in (2)
$-3\cdot(-2/5)=2-7/5$? $\quad 6/5=3/5$ FALSO

E' STATO VERIFICATO CHE $r \cap s = \emptyset$ e CHE le RETTE SONO SGHEMBE

3) d TRA r e s

$$d(r,s)=\frac{|\langle \vec{P_0Q_0}, \vec{d}_r \times \vec{d}_s \rangle|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$



$\langle \vec{P_0Q_0}, \vec{d}_r \rangle = 0$

$\langle P_0Q_0, \vec{d}_s \rangle = 0$

$\langle \vec{RS}, \vec{d}_r \rangle = 0$

$\langle \vec{RS}, \vec{d}_s \rangle = 0$

$\langle (-4t, -3t, t), (3+t, 2+t, 1+t) \rangle$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -4t' \\ -3t' \\ t' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+t \\ 2+t \\ 1+t \end{pmatrix} ; \vec{d}_r \right\rangle = 0$$

lezione 13/11/2023

$$\begin{cases} 4x-2y+3z=3 \\ bx+y=0 \\ 4x-2y+bz=-2 \end{cases}$$

le TRE equazioni possono essere viste come TRE piani
la prima equazione non passa per O, il secondo sì e il terzo no.

$b \in \mathbb{R}$
- per quale b il sistema ha soluzioni? (compatibilità)
- come sono le soluzioni? cosa rappresentano?

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 3 & 3 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & b & -2 \end{array}\right)}_{} \xrightarrow{-R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 3 & 3 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & -5 \end{array}\right) \quad b=3 \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$rk(A) = ?$ $rk(A|B) = ?$

$rk(A) = 2$ $rk(A|B) = 3$ SISTEMA INCOMPATIBILE

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 \end{vmatrix} = (b-3) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ b & 1 \end{vmatrix} = (b-3)(4+2b) = 0$$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$rk(A) = n \iff \det A \neq 0$

$rk(A) < n \iff \det A = 0$

$$b=-2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk(A) = 2$
$rk(A|B) = 2$
COMPATIBILE

∞^1 SOLUZIONI, OVVERO UNA RETTA

$\begin{cases} z=1 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ $x=t$ $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ è la retta passante per $A(0,0,1)$ e nella direzione $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

quando $b \neq 3$ e $b \neq -2$, $\det A \neq 0$ cioè $rk(A)=3=rk(A|B)=3$
$\infty^{3-3}=\infty^0$ compatibile con soluzione unica

$b=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right)$ $\begin{cases} 4x=-2 \\ y=0 \\ z=5/3 \end{cases}$ $x=-1/2$

$P_0=(-1/2, 0, 5/3)$

Regole e leggi

Regola di Cramer

$AX=B$ con $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora $AX=B$ ha soluzione unica purché A sia invertibile.
Le soluzioni sono $x_1=\frac{\det D_1}{\det A}, \dots, x_n=\frac{\det D_n}{\det A}$
dove i D_i sono le matrici ottenute sostituendo la colonna i-esima di A con la colonna dei termini noti (cioè con B)

$x=\left|\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1(-12)=-12$ $x=-1/2$; $y=0$; $z=-5/3$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}=6$

$y=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$ $z=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

Proposizione

Siano la retta
$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$
e α il piano
$\alpha: a''x+b''y+c''z=d''$

$A\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ $A|B\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right)$

allora

1) $r \subset \alpha$ sse $RK(A)=2=RK(A|B)$

2) $r \cap \alpha \neq \emptyset$ SSE $Rk(A)=2$ e $Rk(A|B)=3$
3) $r \cap \alpha = \{P_0\}$ SSE $Rk(A)=3=Rk(A|B)$

PROPOSIZIONE

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} a''x+b''y+c''z=d'' \\ a'''x+b'''y+c'''z=d''' \end{cases}$$

SE POI

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad e \quad A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{array}\right)$$

ALLORA
1) $r=s$ SSE $Rk(A)=2=Rk(A|B)$
2) $r // s$ $(r \neq s)$ SSE $Rk(A)=2$, $Rk(A|B)=3$
3) $r \cap s=\{P_0\}$ SSE $Rk(A)=3=Rk(A|B)$
4) r e s SGHEMBE SSE $Rk(A)=3$ e $Rk(A|B)=4$

$\vec{v}, \vec{w}$ $\quad \vec{v} \neq \vec{0}$
ALLORA $\vec{v} // \vec{w}$ SSE $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{w}=\alpha\vec{v}$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ SONO COMPLANARI SSE $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$

$A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$; $C(x_C, y_C, z_C)$; $D(x_D, y_D, z_D)$

I) I PUNTI A, B, C SONO ALLINEATI SSE

$$Rk\begin{pmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{pmatrix} \leq 1$$

II) I PUNTI A, B, C, D SONO COMPLANARI

$$Rk\begin{pmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{pmatrix} \leq 2$$

PROVARE CHE $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$; $C(0,0,1)$; $D(0,0,0)$ SONO COMPLANARI

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Rk=3 \quad \text{NON COM}$$

Analisi matematica

$P \Rightarrow Q$ implica

P e' condizione necessaria per avere Q.

se piove, e' nuvoloso. se e' nuvoloso, non e' detto che piova.

$P \Leftrightarrow Q$ significa

$P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow Q$ congiunzione

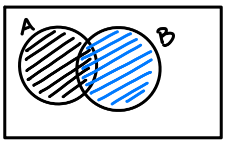
$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ disgiunzione

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$ se bevo, non guido. guido, quindi non bevo

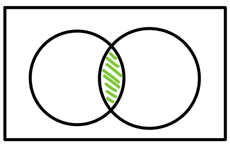
$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow x \in B' \Rightarrow x \in A' \Leftrightarrow B' \subset A'$

le operazioni con gli insiemi sono:

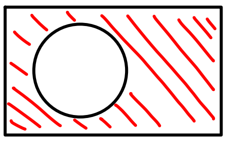
- $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$
- $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$ x e' complementare sse...
- $A \setminus B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$



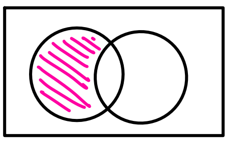
$A \cup B$



$A \cap B$



A'



$A \setminus B$

$\emptyset = \{x / x \in A \wedge x \notin A\}$

$\emptyset \subset A$ ogni insieme contiene l'insieme vuoto

$A \subset A$ ogni insieme contiene se stesso

QUANTIFICATORI

$\forall x,\ p(x)$ quantificatori universale $\quad p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n)$ verificati tutti gli elementi V

$\exists x,\ p(x)$ quantificatore esistenziale $\quad p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n)$ verificato almeno uno V

- $\neg(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x, \neg p(x))$

tutti i numeri sono primi

- $\neg(\exists x, p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg p(x)$

tutti non giocano a tennis

PRODOTTO CARTESIANO

siano A, B non vuoti

$A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$

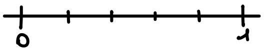
$\mathcal{R}$ si dice una relazione in $A \times B$ sse $\mathcal{R} \subset A \times B$

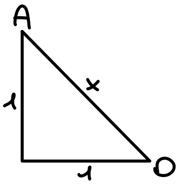
in generale $(a,b) \neq (b,a)$ e $A \times B \neq B \times A$

UNIVERSO

l'universo preso in considerazione e' quello dei numeri reali $(\mathbb{R})$

• I numeri naturali servono per contare
$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ sono infiniti
• I numeri interi sono come i naturali ma possono avere il segno negativo
$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ sono infiniti $\quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
• I numeri razionali comprendono le frazioni
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} / m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ $\quad$ MCD $(m,n) = 1$





$x^2 = 1^2 + 1^2 \quad x^2 = 2$

si supponga che $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ tc $x^2 = 2$

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \qquad (m,n) = 1$

$\frac{m^2}{n^2} = 2 \qquad m^2 = 2n^2$
m^2 e' pari $\rightarrow m$ e' pari

$m = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$
$m^2 = 4k^2$
allora $4k^2 = 2n^2$
$2k^2 = n^2 \qquad n^2$ e' pari $\rightarrow n$ e' pari
il MCD e' 1 ma m e n sono pari $\longrightarrow$ contraddizione (non esiste un'eq. che rappresenti l'ipotenusa)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{Q}' \qquad \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

$\sqrt{2}, \pi, e$ numeri in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ e' un campo completo

$x < y \quad / z, z < 0$
$xz > yz$

TRICOTOMIA

$x, y \in \mathbb{R}$
allora
$x = y \lor x > y \lor x < y$
$x \cdot y = 0 \Rightarrow \underbrace{x = 0 \lor y = 0}$

$x \neq 0 \land y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$ dominio di integrali

LIMITATEZZA

$X \subset \mathbb{R} \,;\, X \neq \emptyset$
X e' limitato superiormente se $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tc $x < k \quad \forall x \in X$

$\mathbb{N}$ non e' limitante superiormente
$X = \{1,2,3,4\}$
$\exists\, 24 \in \mathbb{R} \quad 24 > x \quad x \in X$

DEF. 2

X e' LIMITATO INFERIORMENTE se $\exists k \in \mathbb{R}$ tc $k < x, \forall x \in X$

ESEMPIO

$\mathbb{N}$ e' LIMITATO INFERIORMENTE

$\exists -\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ tc $-\sqrt{5} < n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ non e' LIMITANTE INFERIORMENTE

DEF: X SI DICE LIMITATO se lo e' SUPERIORMENTE e INFERIORMENTE

$X = \{x / x = 1/n \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\mathbb{N} \setminus \{0\}$

DEFINIZIONE

k SI DICE MAGGIORANTE DI X se $x \leq k \quad \forall x \in X$

$k = \max(X)$ se $k \in X$ e k e' un maggiorante per X

DEFINIZIONE

K SI DICE MINORANTE DI x SE $k \leq x \quad \forall x \in X$

$k = \min(X)$ se $k \in X$ e k e' un minorante per X

DEFINIZIONE

$X \subset \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{I}}$ $k = \sup(X)$

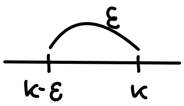
ESTERNO SUPERIORE DI X se k e' IL MINIMO DEI MAGGIORANTI DI X

1) $x \leq k \quad \forall x \in X$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X$ tc $x > k - \varepsilon$

1) k e' MAGGIORANTE PER X

2) NON VI SONO MAGGIORANTI STRUTTURALMENTE MINORI DI k



DEFINIZIONE

$X \subset \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{I}}$ $k = \inf(X)$

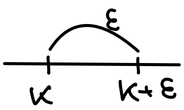
ESTERNO INFERIORE DI X se k e' IL MASSIMO DEI MAGGIORANTI DI X

1) $x \geq k \quad \forall x \in X$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X$ tc $x > k - \varepsilon$

1) k e' MINORANTE PER X

2) NON VI SONO MINORANTI STRUTTURALMENTE MINORI DI k



OSS: X ILLIMITATO SUPERIORMENTE allora l'insieme dei maggioranti $= \emptyset$

Si scrive $\sup(x) = +\infty$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA
$\forall X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$

LIMITATO SUPERIORMENTE AMMETTE ESTREMO SUPERIORE

INTERVALLO
$I \subset \mathbb{R}$ E' DETTO INTERVALLO SE $\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ CON $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x < x_2$ RISULTA CHE $x \in I$

SI OTTIENE (a,b) INTERVALLO APERTO $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

$[a,b] = \{x / a \le x \le b\}$

$[a,+\infty] = \{x / x \ge a\}$

$(a,+\infty) = \{x / x > a\}$

$(-\infty, b] = \{x / x \le b\}$

$(-\infty, b) = \{x / x < b\}$

DEFINIZIONE
$\mathbb{R}$ e' un intervallo $(-\infty, +\infty)$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ SI DICE INTERNO ALL'INTERVALLO I SE $x_0 \in I$ e x_0 non e' un ESTREMO DI I

TEOREMA
DENSITA' DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$

r, r' $r < r'$ REALI

$\exists q \in \mathbb{Q}$ tc $r < q < r'$

VALORE ASSOLUTO
$$|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|-5| = -(-5) = 5$

$x = -5$

$x < 0$

$d(x,y) = |x-y|$

$|x| \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = 0 \iff x = 0$

$-|x| \le x \le |x|$

$|x| = |-x|$

$|x-y| = |y-x|$

$|x+y| \le |x| + |y|$ ⟿ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$

PROPOSIZIONE
* $|x| \le a \iff -a \le x \le a \iff x \in [-a, a]$

$|x| > a \iff x > a \lor -x > a \iff x < -a \lor x > a \iff x \in (-\infty, -a) \lor x \in (a, +\infty) \iff x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

└ complementare di *

ESERCIZI

- X E' 5 OPPURE E' -5

$|x| = 5$

- LA DISTANZA DA X A 3 E' 7

$d(x,3) = 7$

$|x-3| = 7$

$x-3=7 \quad \vee \quad 3-x=7$

$x=10 \quad \vee \quad -x=4 \quad x=-4$

- LA DISTANZA DA X A 5 E' MINORE DI 2

$|x-5|<2$

$-2<x-5<2$

- LA DISTANZA DA X A -3 E' MAGGIORE O UGUALE A 4

$d(x,-3) = |x-(-3)|$

$|x+3| \geq 4$

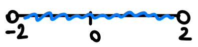
$x+3 \geq 4 \quad \vee \quad -x-3 \geq 4$

$x \geq 1 \quad \vee \quad -x \geq 7$

$x \leq -7$

- X E' COMPRESO FRA -2 E 2

$-2<x<2$



$|x|<2$

- X COMPRESO FRA 4 E 6

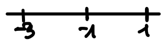
$4<x<6$

$|x-5|<1$

$-1<x-5<1$

$4<x<6$

- X E' COMPRESO TRA -3 E 1



$|x-(-1)|<2$

$|x+1|<2$

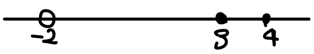
$-2<x+1<2$

$-3<x<1 \quad (-3,1)$

lezione 20/11/2023

ESERCIZIO

SIA $A = (-2,3] \cup \{4\}$



A E' LIMITATO? SI'

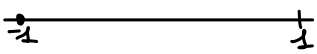
$\sup(A) = 4 = \max(A)$

$\inf(A) = -2$

IL min(A) non esiste (DEVE ESSERE APPARTENENTE ALL'INSIEME).

ESERCIZIO

$B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \,/\, n=1,2,3,\ldots \right\}$



E' LIMITATO

$0 \notin B$

$\inf(B) = -1 = \min(B)$

$\max(B) = 1/2 = \sup(B)$

ESERCIZIO

$C = \{\cos(\pi n) / n = 1, 2, 3, \dots\}$

$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ E' LIMITATO SUP E INF

$= -1, 1$ $0 \notin C$

ESERCIZIO

$A, B \subset \mathbb{R}$ ENTRAMBI NON VUOTI E TALI CHE $A \subset B$

ALLORA SCEGLIERE L'ALTERNATIVA CORRETTA:

(a) $\min B < \inf A$

(b) $\inf B \leq \inf A$

(c) $\min B \leq \min A$

(d) $\inf B < \min A$

(e) $\inf B < \inf A$

FORNIRE IL CONTROESEMPIO PER LE IPOTESI FALSE

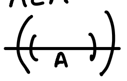
a e c SONO AUTOMATICAMENTE FALSE, PERCHÉ NON E' DETTO CHE CI SIA PER FORZA IL MINIMO.

$\{n \in \mathbb{Z} / n \text{ DISPARI}\} \subset \mathbb{Z}$

LA RISPOSTA CORRETTA E' LA b

PERCHÉ

$A \subset A$



ESERCIZIO

$A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\sup(A) = 2$ e $\inf(A) = 0$. ALLORA NECESSARIAMENTE:

a) $2 \in A$

b) $\exists x \in A$ t.c. $0 < x < 2$

c) $\exists x \in A$ t.c. $x > 1$

d) A COINCIDE CON $(0, 2)$

e) $0 \in A$ OPPURE $2 \in A$

- $A = (0, 2) \rightsquigarrow$ AUTOMATICAMENTE a ED e SONO FALSE
- $A = \{0, 2\} \rightsquigarrow$ AUTOMATICAMENTE b E' FALSA

$\Big\}$ AUTOMATICAMENTE d E' FALSA

C E' VERA

ESERCIZIO

$A = \{x / 1 < x \leq 2\}$

$B = \{x / 27 < x^3 < 64\}$

$C = \{x / x = 3 + 1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x = n/n+1 : n \in \mathbb{N}\}$

$E = \{1\} \cup (2, 3] \cup (4, 10)$

$F = \{x / 2 < x^2 \leq x^4\}$

$G = \{x / x = n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\}$

$H = \{x / x = n - 1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

(A) INTERVALLO: $(1, 2]$ LIMITATO SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE

(B) $27 \leq x^3 \quad \wedge \quad x^3 < 64$

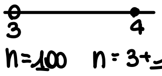
$3 \leq x \quad \wedge \quad x < 4 \qquad 3 \leq x < 4$

$[3, 4)$ LIMITATO SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE

$\inf(B) = 3 = \min(B) \qquad \sup(B) = 4$

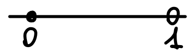
(C) NON E' UN INTERVALLO

E' LIMITATO



$n = 100 \quad n = 3 + \frac{1}{100}$

(D) $n=1000$ $\frac{1000}{1001}$



e' limitato superiormente e inferiormente
non e' un intervallo
non ha $\max(D)$

(E) $\max(E)$ non esiste

(F) DA SOLI 🤡

(G) non e' limitato (illimitato) $\sup(G)=+\infty$, $\inf(G)=1$
non e' un intervallo

(H) $0, 3/2, 8/3, 15/4, 24/5, \dots$
$\inf(H)=0=\min(H)$
$\sup(H)=+\infty$

ESERCIZIO

$K=\{x/|6-7x|\leq 5\}$

$-5\leq 6-7x\leq 5$

$-5\leq 6-7x \quad \wedge \quad 6-7x\leq 5$

$7x\leq 6+5 \quad \wedge \quad -7x\leq 5-6$
$7x\leq 11 \quad \wedge \quad -7x\leq -1$

$x\leq \frac{11}{7} \quad \wedge \quad x\geq \frac{1}{7}$

$\left[\frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right]$ intervallo limitato superiormente e inferiormente

$\sup(K)=11/7$ $\inf(K)=1/7$

ESERCIZIO

$S=\{x\in\mathbb{R} / |2|x|-1|=5\} = \{-3,3$

$|2|x|-1|=5$

SE $x\geq 0$ $|2x-1|=5$ $2x-1=5 \Rightarrow 2x=6$ $x=3$
$1-2x=5 \Rightarrow -2x=4$ $x=-2$ ⇝ porta a contraddizione

$|-x|=|x|$

SE $x<0$ $|2(-x)-1|=5$ $|-2x-1|=5$
$-2x-1=5 \Rightarrow -2x=6$ $x=-3$
$2x+1=5 \Rightarrow 2x=4$ $x=2$

non e' un intervallo

$\max(S)=3$
$\min(S)=-3$

ESERCIZIO

$R=\{x\in\mathbb{R}/|x|\geq 4\}$

$x\geq 4 \vee -x\geq 4$ $\inf(R)=-\infty$
$x\geq 4 \vee x\leq 4$ $\sup(R)=+\infty$

$(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

ESERCIZIO PER CASA

$A = \{x = 3+3/n ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cap \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 4\}$

$B = \{x / x = 3-3/n ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

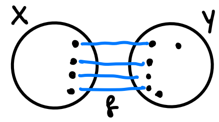
FUNZIONI

$X, Y \neq \emptyset \quad X, Y \subset \mathbb{R}$

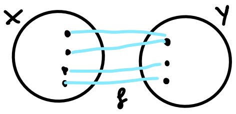
UNA RELAZIONE E' UN QUALSIASI SOTTOINSIEME DEL PRODOTTO CARTESIANO $X \times Y$

R RELAZIONE SE $R \subset X \times Y$

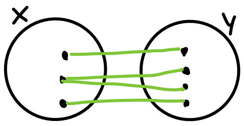
f E' UNA FUNZIONE X IN Y SE E' UNA RELAZIONE t.c. AD OGNI ELEMENTO DI X VIENE ASSOCIATO UN UNICO ELEMENTO DI Y $(x f y)$



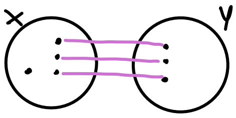
← E' UNA FUNZIONE



← E' UNA FUNZIONE



← NON E' UNA FUNZIONE



← NON E' UNA FUNZIONE

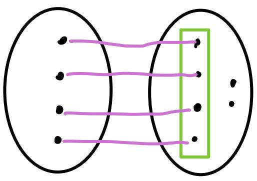
$f: X \longrightarrow Y$ FUNZIONE DI X IN Y CON X, Y SOTTOINSIEMI NON VUOTI REALI

$x \longrightarrow y = f(x)$

$\mathrm{dom} f = X$ DOMINIO

$\mathrm{codom} f = Y$ CODOMINIO

$\mathrm{Im}_f = \{y \in Y / \exists x \in X : f(x) = y\}$ IMMAGINE DI f $\qquad \mathrm{Im}_f = f(X)$



$\mathrm{Im}_f \subset Y$

$\mathrm{Im}_f = f(X) = \{f(x) / x \in X\} \subset Y$

CONTROIMMAGINE

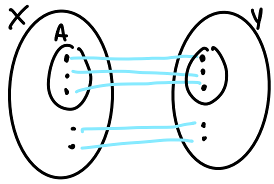
SIA $B \subset Y$ E $f: X \to Y$ FUNZIONE

$f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}$ SI CHIAMA CONTROIMMAGINE DI B TRAMITE f

DEF: $A \subset X$ E $f: X \to Y$ FUNZIONE

SI DEFINISCE

$f(A) = \{f(x) \in Y / x \in A\}$

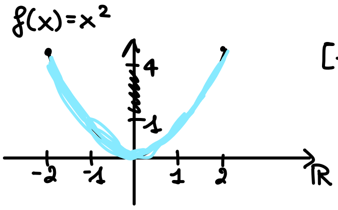


$\rightsquigarrow f(A)$

ESEMPIO

$$f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

$f(x) = x^2$



$[-2,2] = I$

$GRAF(f) = \{(x, f(x)) / x \in dom_f\}$

$f([1,2]) = [1,4]$

$f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$

$J = [1,2]$

$f(J) = [1,4]$

$f^{-1}(f(J)) = f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$

$J \subset f^{-1}(f(J))$

INIETTIVA

$f : X \longrightarrow Y$ funzione si dice iniettiva sse

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$

equivalentemente

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

SURIETTIVA

f si dice suriettiva sse $f(X) = Y$

$f : X \to Y$ funzione

BIETTIVA

$f : X \to Y$ funzione biettiva sse f e' iniettiva e suriettiva

TEOREMA

$f : X \to Y$ funzione

$A \subset f^{-1}(f(A)), \ \forall A \subset X$

$f(f^{-1}(B)) \subset B, \ \forall B \subset Y$

OSSERVAZIONE

$f : X \to Y$ funzione

f e' iniettiva sse $f^{-1}(f(A)) = A \ \ \forall A \subset X$

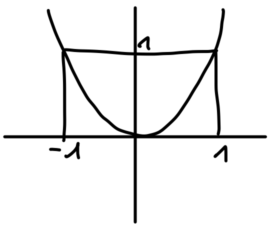
f e' suriettiva sse $f(f^{-1}(B)) = B \ \ \forall B \subset Y$

INVERSA

$f : X \to Y$ funzione iniettiva, allora la funzione che per dominio ha $f(X)$ che associa ad ogni $y \in f(X)$ l'unico elemento $x \in X$ t.c. $f(x) = y$ si chiama funzione inversa di f e si denota per f^{-1}

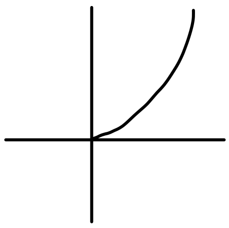
OSSIA f È INIETTIVA

$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$



$f(x)=x^2$ SU $\mathbb{R}$ NON AMMETTE FUNZIONE INVERSA

$f(1)=1 \Leftrightarrow \underbrace{f^{-1}(1)=1 \quad f^{-1}(-1)=1}_{\text{non va bene}}$



$$f: [0,+\infty) \rightarrow f([0,+\infty)) \subset \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

ESEMPIO

PROVARE CHE $f(x)=2x-3$ È BIETTIVA E DETERMINARE LA FUNZIONE INVERSA

$f(x)=f(y)$ x DIMOSTRARE $x=y$

INFATTI $2x-3=2y-3$

$2x=2y$

$x=y$

PER CALCOLARE L'INVERSA:

$y=2x-3$

$y+3=2x$

$\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}=x$

$g(x)=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$f(2)=1$

$g(1)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{2}=2$

COMPOSIZIONI

SIANO $f: X \to Y$ E $g: Z \to W$ FUNZIONI

SE $f(X) \subset Z$ ALLORA SI DEFINISCE LA FUNZIONE COMPOSTA $g \circ f$ QUELLA CHE HA PER DOMINIO X E CODOMINIO W ED È t.c. $(g \circ f)(x)=g(f(x))$

ESEMPIO

SIANO $f(x)=2x+3$ E $g(x)=x^2$

$\underbrace{g(f(x))}_{(g \circ f)(x)}=g(2x+3)=(2x+3)^2=4x^2+12x+9$

IN GENERALE

$g \circ f \neq f \circ g$

INVECE

$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

Lezione 22/11/2023

$f(x) = \frac{x+3}{2-x}$

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow \frac{x+3}{2-x} \end{array}\right\}$ non e' una funzione

$X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ "dominio naturale"

"dom f"

$[-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ e' una funzione

$\quad x \longrightarrow \frac{x+3}{2x}$

$f(0) = \frac{3}{2}$

$f(1) = 4$

$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longrightarrow \frac{x+3}{2-x}$

f iniettiva (V)

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

infatti $\frac{x+3}{2-x} = \frac{y+3}{2-y}$

$(x+3)(2-y) = (2-x)(y+3)$

$2x - xy + 6 - 3y = 2y + 6 - xy - 3x$

$5x = 5y \quad x = y$

f inversa?

$y = \frac{x+3}{2-x}$

$(2-x)y = x+3$

$2y - xy = x+3$

$-x - xy = 3 - 2y$

$x(-1-y) = 3-2y$

$x = -\frac{3-2y}{1+y}$

$x = \frac{2y-3}{1+y}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{1+x}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longrightarrow \frac{2x-3}{1+x}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f^{-1}(f(x))$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+3}{2-x}\right) = \frac{2\left(\frac{x+3}{2-x}\right) - 3}{1 + \left(\frac{x+3}{2-x}\right)}$

$= \frac{\frac{2x+6}{2-x} - 3}{\frac{2-x+x+3}{2-x}} = \frac{\frac{2x+6-6+3x}{\cancel{2-x}}}{\frac{5}{\cancel{2-x}}} = \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = x$

Funzione lineare

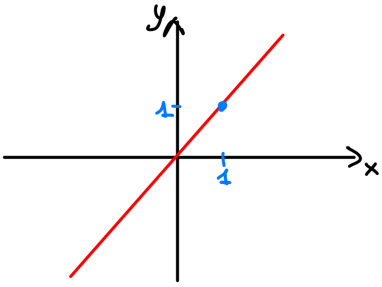
$y = f(x) = mx + q$ "retta"

se $m = 1$ $\quad q = 0$

$f(x) = x$

$\text{GRAF}(f) = \{(x, f(x)) / x \in \mathbb{R}\}$

$\qquad\qquad = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\}$



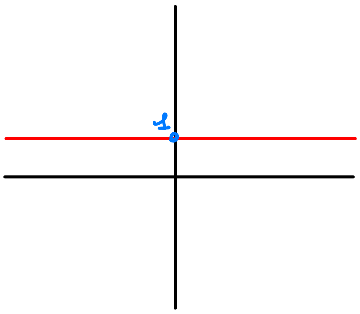
iniettiva

se $m = 0$ $\quad q = 1$

$f(x) = 1$

$\text{GRAF}(f) = \{(x, 1) / x \in \mathbb{R}\}$

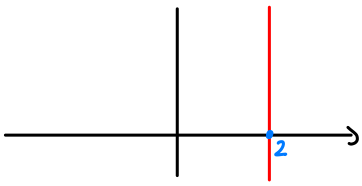
non iniettiva o suriettiva



non e' invertibile

$\text{Im} f = \{1\}$

le rette del piano sono tutte funzioni?



$\{(2, y) / y \in \mathbb{R}\}$ non puo' essere una funzione

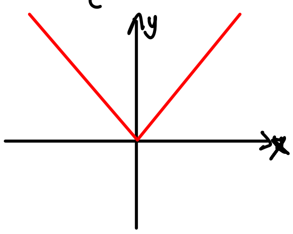
$x = 2$ non e' funzione

Valore assoluto

$|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\qquad x \longrightarrow |x|$

$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



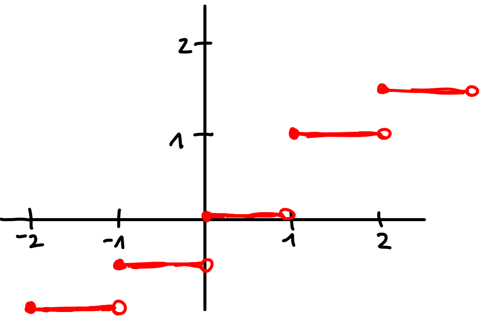
non e' iniettiva

Parte intera

$[3,8] = 3$

$[-3] = -3$

$[2,1]=2$
$[-1|2]=-1$
$[3|4]=0$
$[-\pi]=-4$
$[8]=8$
$[\pi]=3$
$[\sqrt{2}]=1$

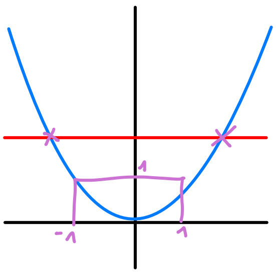


non e' iniettiva

$Im \lfloor\ \rfloor = \mathbb{Z}$
$\max\{x / x \leq a\}$

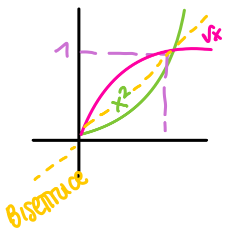
PARABOLA

$y=x^2$
$GRAF(f) = \{(x,x^2) / x \in \mathbb{R}\}$



non e' iniettiva

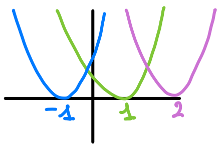
se si restringe il dominio



e' iniettiva
$y=x^2$
$\sqrt{y}=x$
$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

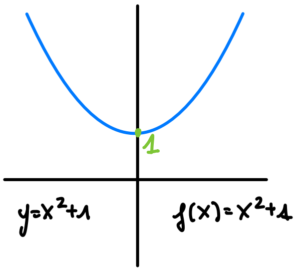
$\sqrt{4}=2$
$\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\Big> 4$ $\quad x_1=-2$
$\quad x_2=2$

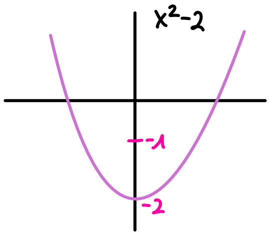
$\sqrt{x^2}=|x|$

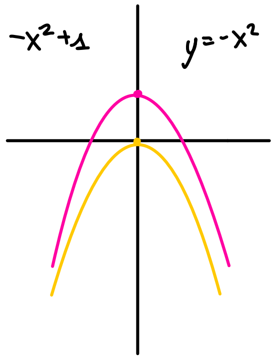


- $y=(x-1)^2$
- $y=(x-2)^2$
- $y=(x+1)^2$

$y=(x+a)^2$
$\longleftarrow a>0$
$\longrightarrow a<0$







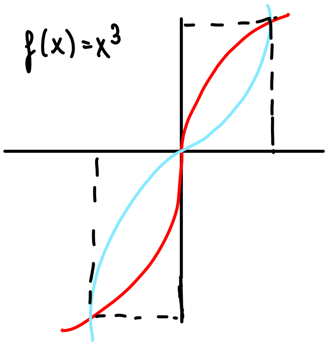
$y = ax^2+bx+c$

$a \neq 0$

se $a<0$ ∩

$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

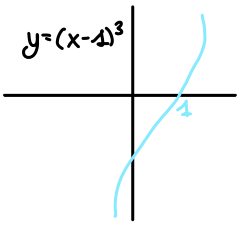
$f(x)=x^3$



$y=x^3 \; / \sqrt[3]{\;}$

$\sqrt[3]{y}=x$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$



Polinomi

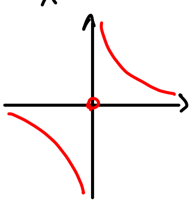
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n \quad a_i \in \mathbb{R}$

Razionali

$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi nel senso della def data

$f(x)=\frac{1}{x}$

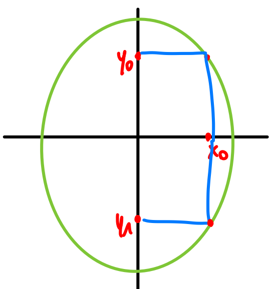


asintoto

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

asse $x \to y=0$

asse $y \to x=0$



$S=\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, x^2+y^2=1\}$

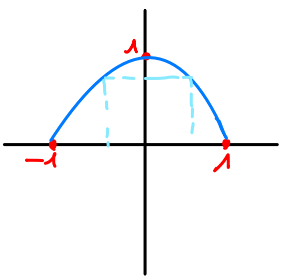
$x^2+y^2=1$

$y^2=1-x^2$

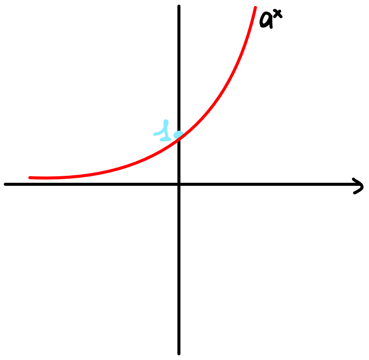
$y=\sqrt{1-x^2}$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$\text{dom} f=[-1,1] \quad \text{Im} f=[0,1]$

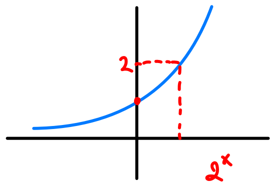


Funzioni esponenziali e logaritmiche

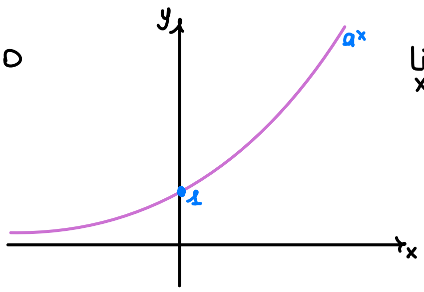


$a>1$

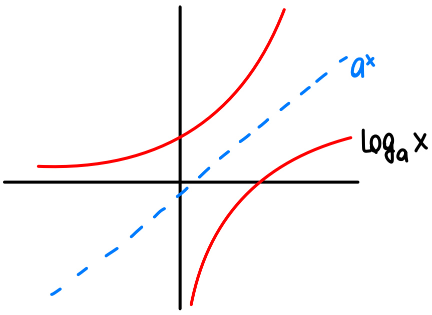
$y=f(x)=a^x$



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



$y=a^x$

$\log_a y=\log_a a^x=x$

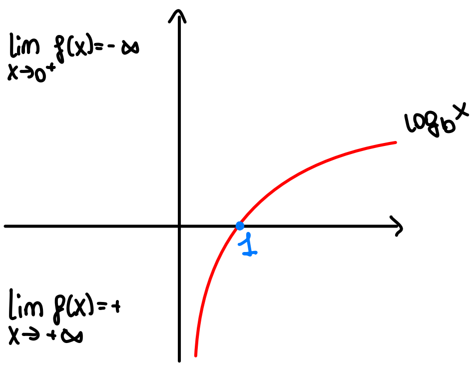
$\log_b x=y \iff b^y=x$

$2^3=8$ $\qquad$ $10^2=100$

$\sqrt[3]{8}=2$ $\qquad$ $\sqrt[2]{100}=10$

$\log_2 8=3$ $\qquad$ $\log_{10}100=2$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

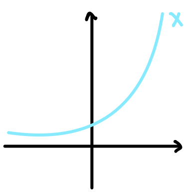


$b>1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+$

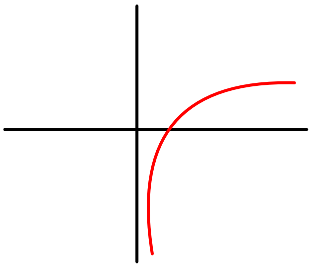
esponenziale: $\mathbb{R}\longrightarrow(0,+\infty)$

$x\longrightarrow a^x$



$a>1$ fisso

LOGARITMICHE



$\mathrm{dom}\, f = (0, +\infty)$
$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$
$\log_b \quad b>0$

1) $\log_b b = 1$
2) $\log_b 1 = 0 \quad b>0$
3) $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

$\log_b x = z_1 \Leftrightarrow b^{z_1} = x$
$\log_b y = z_2 \Leftrightarrow b^{z_2} = y$
$b^{z_1+z_2} = xy$
$\log_b (xy) = z_1 + z_2$
$= \log_b x + \log_b y$

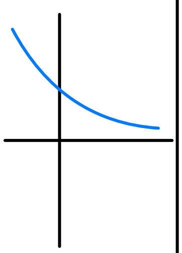
4) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y \qquad y \neq 0$
5) $\log_b x^z = z \cdot \log_b x$
6) $\log_b x = \dfrac{\log_{b'} x}{\log_{b'} b}$

7) $\log_{10} x = \log x$
$\log_e x = \ln x$

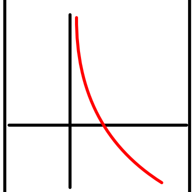
IMPORTANTE
$\log_b b^x = x$

$b^{\log_b x} = x$

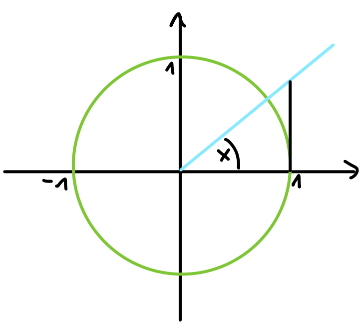
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$0<a<1$

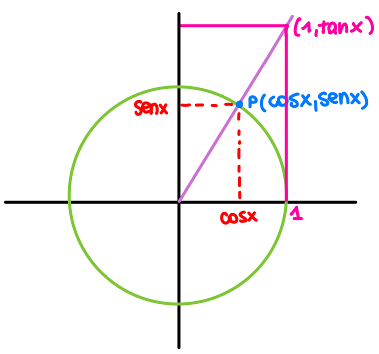


$\log_{1/2} x$
$0<b<1$



FUNZIONI CIRCOLARI





senx = proiezione sull'asse delle y
$\tan x = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$

$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$-1 \leq \mathrm{sen}\,x \leq 1$
$|\mathrm{sen}\,x| \leq 1$
$|\cos x| \leq 1$

$\mathrm{sen}: \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$x \to \mathrm{sen}\,x$
$\cos: \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$x \to \cos x$

DISPARI

f si dice dispari sse $f(-x) = -f(x)$

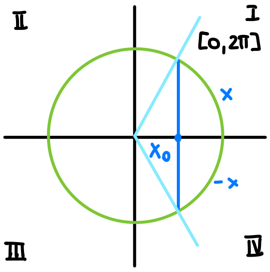
la disparità produce simmetria all'origine

PARI

f si dice pari sse $f(x) = f(-x)$

la parità produce simmetria all'asse y

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

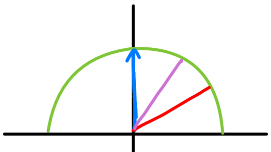


$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
$\cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad k \in \mathbb{Z}$

$2\pi \longleftrightarrow 360°$
$\pi \longleftrightarrow 180°$
$\pi/3 \longleftrightarrow 60°$

$\operatorname{sen} 0 = 0$
$\cos 0 = 1$
$\operatorname{sen} 2n\pi = 0 \quad n \in \mathbb{Z}$
$\cos 2n\pi = 1 \quad n \in \mathbb{Z}$



$\operatorname{sen} \pi = 0$
$\cos \pi = -1$

$\operatorname{sen} \pi/2 = 1$
$\cos \pi/2 = 0$

$\operatorname{sen} 3/2\pi = -1$
$\cos 3/2\pi = 0$

$\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{3}/2 \quad 1/2$

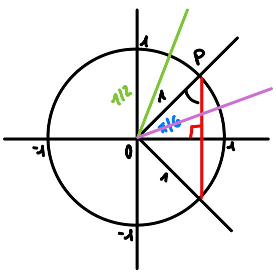
$\tan 0 = 0 \quad \tan \pi = 0$
$\tan \pi/2$ non è definita

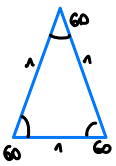
$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\operatorname{cosec} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

lezione 27/11/2023





$\cos \pi/6 = \cos 30°$
$h^2 = 1 - 1/4 = 3/4$
$h = \sqrt{3}/2$

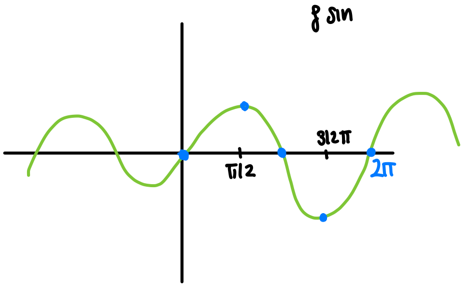
$\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$
$\sin \pi/6 = 1/6$

$\cos \pi/3 = 1/2$
$\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$

$\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$

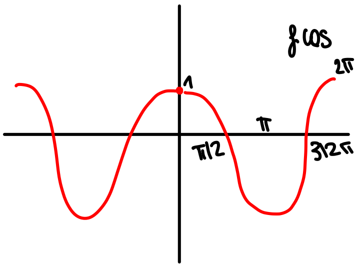
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \theta \neq \pi/2$
$\theta \neq 3/2\pi$

GRAFICO



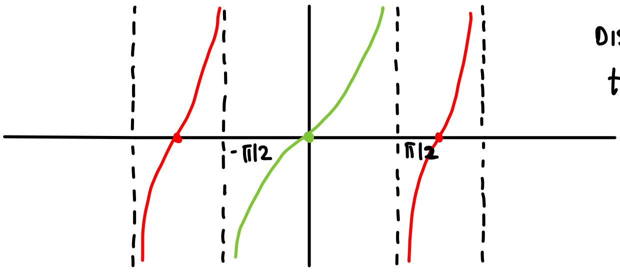
$|\sin x| \leq 1$

$\sin(-x) = -\sin x$ funzione dispari



$|\cos x| \leq 1$

$\cos(-x) = \cos(x)$ funzione pari



DISPARI

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

suriettiva

$\operatorname{Im} \tan = \mathbb{R}$

Funzione inversa del seno

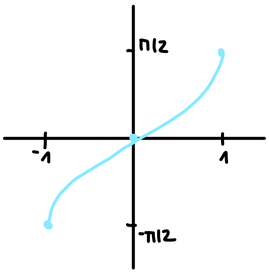
$\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$

si restringe il dom

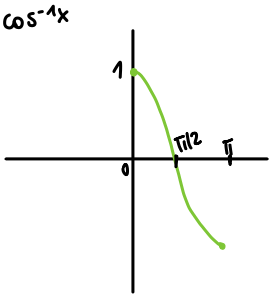
$\sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$

$\sin^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$x \longrightarrow \arcsin x$

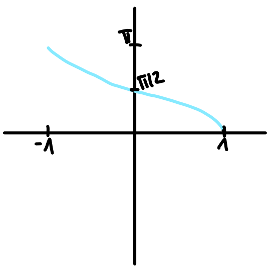


$\cos^{-1} x$



$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$x \longrightarrow \arccos x$



$\arcsin x = y \Leftarrow \sin y = x$

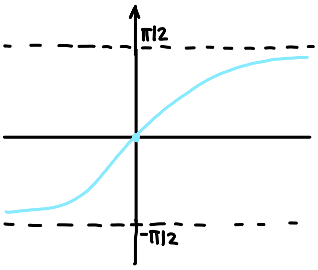
$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x$

arc tan $\tan^{-1}$

$\arctan x = y$ sse $\tan y = x$

$\operatorname{arctg}(x)$

$\tan^{-1}(x)$



le rette $y=\pi/2$ e $y=-\pi/2$ sono gli asintoti della tangente

$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \pi/2$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$

PROPOSIZIONE

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

MONOTONIA

$A \subset \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$

$f: A \to \mathbb{R}$ funzione

si dice che f e' crescente in A se $\forall x_1, x_2 \in A$, allora se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

analogamente si definisce

f e' decrescente in A

$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \geq f(x_2)$

si parla di monotonia stretta

strettamente crescente in A

$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$

analogamente

f strettamente decrescente in A

OSSERVAZIONE

strettamente crescente $\Rightarrow$ crescente e il reciproco e' generalmente falso

TEOREMA

se $f: A \to \mathbb{R}$ e' strettamente monotona, allora f e' iniettiva

DIMOSTRAZIONE

se $x_1 \neq x_2$ si avra' che $x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1$

se $x_1 < x_2$ allora $x_1 \neq x_2$

supponendo che sia monotona strettamente crescente allora $f(x_1) < f(x_2)$

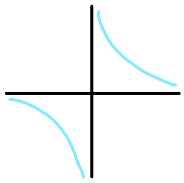
allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

f e' iniettiva

ci sono funzioni iniettive che non sono strettamente crescenti

CONTROESEMPIO

$f(x)=\frac{1}{x}$



$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 1/x$

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ non e' strett. decrescente
$x_1<x_3 \Rightarrow f(x_1)<f(x_3)$

invece
$(-\infty,0)\Rightarrow\mathbb{R}$ e' strettamente decrescente
$x \longrightarrow 1/x$

pure $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

ESERCIZIO

SIA $f(x)=\frac{x-1}{2-x}$

TROVARE LA CONTROIMMAGINE DEL PUNTO $\{0\}$ E DELL'INTERVALLO $[2,+\infty)$

$\text{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$f^{-1}(\{0\})=\{x\in \text{dom} f / f(x)\in\{0\}\}$

$=\{x/\frac{x-1}{2-x}=0\}=\{x/x-1=0\}=\{1\}$

$f^{-1}([2,+\infty))=\{x/f(x)\in[2+\infty)\}$
$=\{x/\frac{x-1}{2-x}\geq 2\}=[\frac{5}{3},2)$

$\frac{x-1}{2-x}-2\geq 0$

$\frac{x-1-4+2x}{2-x}\geq 0 \quad \frac{3x+5}{2-x}\geq 0 \qquad x=\frac{5}{3} \qquad x=2$

$x\geq 5/3$

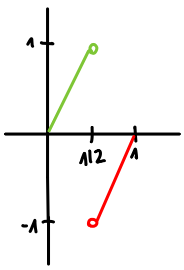
$x<2$

ESERCIZIO

TRACCIARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{se } 0\leq x<1/2\\ 0 & \text{se } x=1/2\\ 2x-2 & \text{se } 1/2<x\leq 1\end{cases}$$

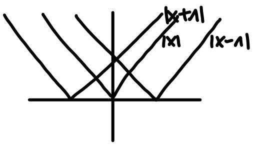
DETERMINARE ESTREMO SUPERIORE, INFERIORE ED EVENTUALI max e min su $[0,1]$

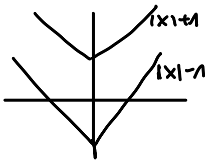


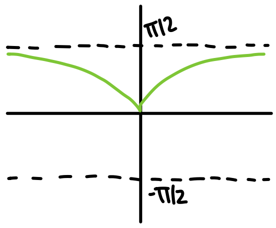
$\text{Im} f=(-1,1)$ non e' limitata
$\inf f=-1$
$\sup f=1$

ESERCIZIO

TRACCIARE IL GRAFICO DI $f(x)=|x+1|$, $g(x)=|x-1|$, $h(x)=|x|+1$, $l(x)=|x|-1$, $m(x)=|\arctan x|$

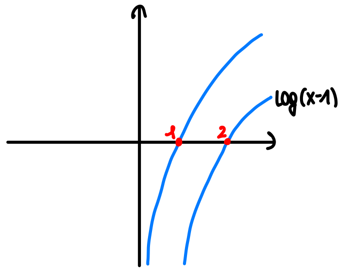


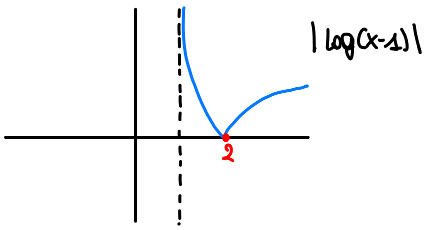


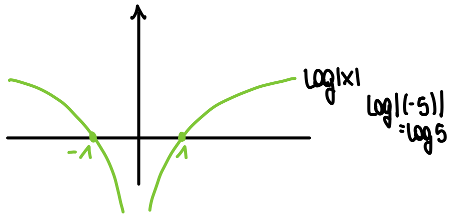


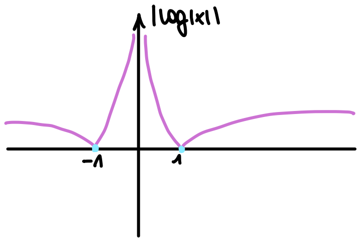
ESERCIZIO

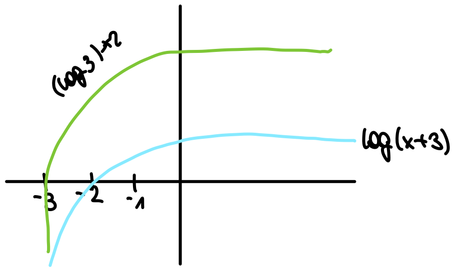
a partire da $f(x)=\log x$ disegnare $g(x)=|\log(x-1)|$; $h(x)=|\log|x||$; $r(x)=2+\log(x+3)$, $k(x)=|\log|2-x||$

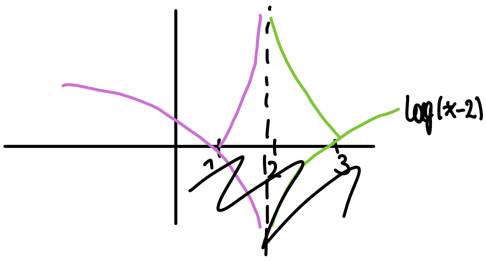






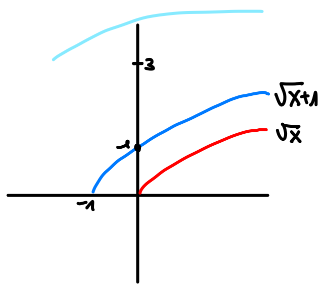






esercizio

determinare il dom della funzione $f(x)=3+\sqrt{x+1}$ e verificare che sia iniettiva sul dominio. Trovare Im f e verificare che non è suriettiva



$f(x)=f(y)$ per dimostrare $x=y$

$\cancel{3}+\sqrt{x+1}=\cancel{3}+\sqrt{y+1}$

$x+\cancel{1}=y+1$

$x=y$

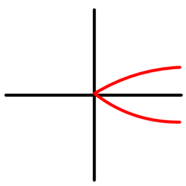
$y=3+\sqrt{x+1}$

$y-3=\sqrt{x+1}$

$y^2-6y+9=x+1$

$y^2-6y+9-1=x$

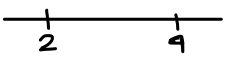
$x=y^2-6y+8$



$x=y^2-6y+8\geq 0$

$(y-2)(y-4)$

$y-2\leq 0 \;\vee\; y-4\leq 0$



$y\leq 2 \;\vee\; y\leq 4$

$y \geq 3$

$\text{Im} f = [4, +\infty]$

ESERCIZIO

DETERMINARE $\text{Im} f$ SE $f(x) = 3 - \sqrt{x^2+1}$

$y - 3 = -\sqrt{x^2+1}$

$y^2 - 6y + 9 = x^2 + 1$ $\qquad y \leq 3$

$y^2 - 6y + 8 = x^2$

$x = \sqrt{y^2 - 6y + 8}$

$y^2 - 6y + 8 \geq 0$

$(y-2)(y-4) \geq 0$

$y \geq 2 \ \vee \ y \geq 4$ NO

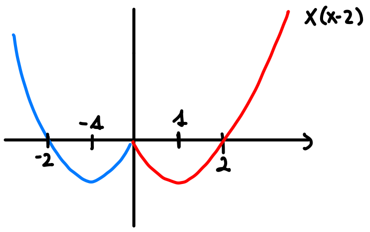
ESERCIZIO

TROVARE OPPORTUNE RESTRIZIONI DI $f(x) = x^2 - 2|x|$ CHE SIANO INVERTIBILI

SE $x \geq 0$ $f(x) = x^2 - 2x$

SE $x < 0$ $f(x) = x^2 + 2x$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 \end{cases}$$



$[1, +\infty)$

$(-\infty, -1]$

$[-1, 0]$

$[0, 1]$

L'IMPORTANTE È AVERE L'INIETTIVITÀ

ESERCIZIO

SIANO $f(x) = x^2 + x - 2$

$g(x) = \log(1 - 2x)$

DETERMINARE $g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x - 2) = \log(1 - 2(x^2 + x - 2)) = \log(1 - 2x^2 - x + 4) = \log(-2x^2 - x + 5)$

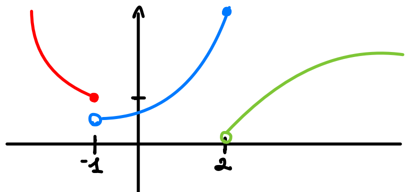
lezione 29/11/2023

ESERCIZIO

DISEGNARE

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ e^x & -1 < x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

"DISEGNO UN PO' PAZZO"



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

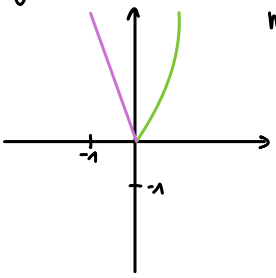
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\text{Im} f = (0, +\infty)$

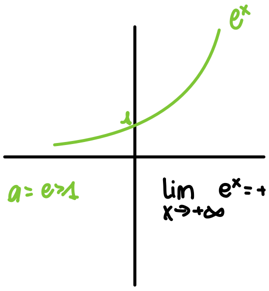
ESERCIZIO

DISEGNARE

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$



non e' iniettiva o suriettiva

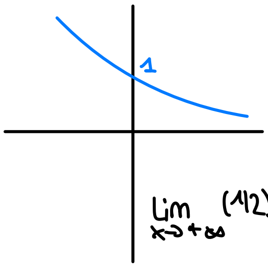


STRETTAMENTE CRESCENTE

$a=e>1$

$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$



STRETTAMENTE DECRESCENTE

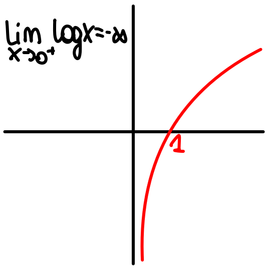
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\lim_{x\to+\infty} (1/2)^x=0$

$x<y \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^y$

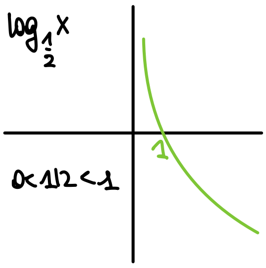
$0<a<1$

$\lim_{x\to0^+} \log x=-\infty$



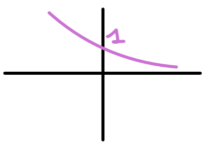
STRETTAMENTE CRESCENTE

$\log_{\frac{1}{2}} x$



$0<1/2<1$

$f(x)=e^{-x}$



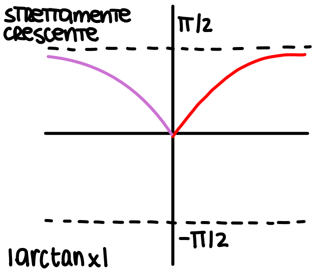
$0<1/e<1$ $\quad =\frac{1}{e^x}$

$=\left(\frac{1}{e}\right)^x$

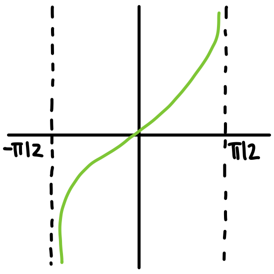
ESERCIZIO

DISEGNARE

$f(x) = |\arctan x|$



$|\arctan x|$



$\tan\theta = r$

$\Updownarrow$

$\arctan r = \theta$

SUCCESSIONI

e' una funzione in dominio $\mathbb{N}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$0 \to a_0$

$1 \to a_1$

$2 \to a_2$

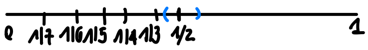
$\dots$

$n \to a_n$

$a_n = 1/n$

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$

$n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$



$(-n^2)_{n\in\mathbb{N}}$

$\dots, -9, -4, -1, 0$

$n \to \infty$ allora $(-n^2) \to -\infty$

$(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

$0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, 2\sqrt{3}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, 4, \dots$

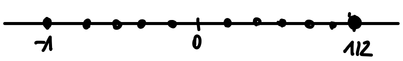
$a_n = (-1)^n$

$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$(-1)^n \xrightarrow{n\to\infty}$ oscillante

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$-1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5$



$a_n = \frac{n+1}{n}$

$2, 3/2, 4/3, 5/4 \longrightarrow 1$

$a_n = 1^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$

CONVERGENTI $\Rightarrow$ vanno a un numero reale

DIVERGENTI $\rightarrow$ vanno a $+\infty$ o $-\infty$

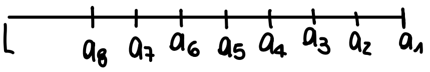
OSCILLANTI

$(-4)^n+(-5)^n$

DEFINIZIONE

SI DICE CHE a_n CONVERGE a L n reale sse $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}$ tc $\forall n>N \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$
in tale caso si scriverà

$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = L$



DIMOSTRARE CHE

$\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

DATO CHE $\varepsilon>0$ PER DIMOSTRARE CHE $\exists N \in \mathbb{N}$ tc $\forall n>N$, allora $d(\frac{1}{n},0)<\varepsilon$

infatti

$|\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$

$|\frac{1}{n}|<\varepsilon$

$\frac{1}{\varepsilon}<n$

$n>\frac{1}{\varepsilon}$

$N=|\frac{1}{\varepsilon}|$

$\varepsilon = 0,007$

$N=[\frac{1}{0,007}]$

$=[142,85714]=142$

$a_1, a_2, \dots, a_{142}$

A PARTIRE DA $a_{143} \xrightarrow{\text{tutti}}$ $\frac{1}{143}<0,007$ $\frac{1}{144}<0,007$

ESERCIZIO

DIMOSTRARE USANDO DEF CHE $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

DATO $\varepsilon>0$ PER DIM $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n>N$ allora $|\frac{n+1}{n}-1|<\varepsilon$

INFATTI $|\frac{n+1}{n}-1|<\varepsilon$

$\frac{1}{n}<\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon}<n$

$n>\frac{1}{\varepsilon}$

$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$

DEFINIZIONE

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n>N \Rightarrow a_n>M$

DATO $M \in \mathbb{R}$ PER DIM CHE ESISTE $N \in \mathbb{N}$ tc $n^2-1>M$

INFATTI, PROVARE CHE $n^2-1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-1)=+\infty$

$n^2 > M+1$
$n > \sqrt{M+1}$

$N = [\sqrt{M+1}]$

$M = 6$
$N = [\sqrt{7}] = 2$
$a_3 = 8 > 6$
$a_4 = 15 > 6$

DEFINIZIONE
$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$ tc $\forall n > N \Rightarrow a_n < M$

ES: $\lim_{n \to \infty} K = K$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tc $\forall n > N$ SI HA CHE $|K-K| < \varepsilon$
$0 < \varepsilon$

TEOREMA
SI HA CHE LE SUCCESSIONI a_n e b_n CONVERGENTI RISPETTIVAMENTE a L e L' $L, L' \in \mathbb{R}$

1) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) =$
$\lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$
$L + L'$

2) $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot L'$

3) $\lim_{n \to \infty} K \cdot a_n = K \cdot L$

4) $\lim_{n \to \infty} a_n / b_n = L/L'$ $b_n \neq 0, L' \neq 0$

FORME INDETERMINATE

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $(+\infty) + (-\infty)$
- $0/0$
- 1^{∞}
- 0^0

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
$(+\infty) \cdot a$ $a > 0 \to +\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
$\frac{a}{\infty} = 0$
$\frac{5}{0^+} = +\infty$ $\frac{5}{0^-} = -\infty$

NON SONO FORME INDETERMINATE

ESEMPIO
$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+2n-3}$ $\lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(5 + \cancel{\frac{2}{n}} - \cancel{\frac{3}{n^2}})} = \frac{3}{5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{3}}(-1+\cancel{1/n^2})}{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n^2})} = -\frac{n}{1} = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+5}{6n^3+n^2+n-\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+\cancel{3/n}+\cancel{5/n^2})}{n^3(6+\cancel{1/n}+\cancel{1/n^2}-\cancel{\sqrt{3}/n^3})} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+66}{3n-15} = 1$$

$|a|<1$

$-1<a<1$

$$\lim_{n\to\infty} (3/4)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} 7^n = +\infty$$

$1, 7, 49, \ldots \longrightarrow +\infty$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[\text{GRAVE INADEMPIENZA}]{} 1$ GIUSTO $\to e$

$2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots$

lezione 4/12/2023

FORME INDETERMINATE

$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{+\infty}{-\infty}$ $\frac{+\infty}{+\infty}$ $\frac{-\infty}{-\infty}$ $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n-5} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1-\frac{5}{n})} = 1$$

$\infty.0$ $-\infty.0$ $+\infty-(-\infty)$

$+\infty\cdot 0$ $+\infty\cdot 0^-$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$(+\infty)-(+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$$

$+\infty\cdot((+\infty)+(-\infty))$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$(+\infty)\cdot 0$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$$

$(+\infty)-(+\infty) \sim$ forma indeterminata

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n}}$$

$n+n\sqrt{n}$

$n+n\sqrt{n}/n$

CALCOLARE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} \quad FI: \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n 2+3^n 3}{2^n+3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}(\cancel{(2/3)^n}\cdot 2+3)}{\cancel{3^n}(\cancel{(2/3)^n}+1)} = 3$$

Teorema

Ogni successione convergente e' limitata

Per ipotesi a_n

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L,\ L\in\mathbb{R}$

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ tc $\forall n>N \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$

$|a_n-L|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<a_n-L<\varepsilon$

$\Leftrightarrow L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$

$a_n\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Inoltre

$a_0, a_1, \dots, a_N$ e' un insieme finito

Teorema

Una successione a_n limitata superiormente e monotona crescente, allora risulta essere convergente e converge all'estremo superiore $\sup\{a_n\}$

Analogamente vale l'altro caso

a_n e' monotona crescente sse $a_{n+1}>a_n\ \forall n$

a_n e' monotona decrescente sse $a_n\geq a_{n+1}$

Valgono le definizioni in senso stretto

Crescente: $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\{\sqrt{n}+1\}$

Decrescente: $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\{2-\sqrt{n}\}$

Teorema del confronto (2 carabinieri)

$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \quad n\geq N \quad N$ fissato

L

$n\to\infty$

limiti notevoli

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & -1<a<1 \\ \nexists & a<-1 \end{cases}$$

Osservazione

il limite, se $\exists$, e' unico

$$\lim_{n\to\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & b>0 \\ 1 & b=0 \\ 0 & b<0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

in particolare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

invece sono divergenti (cioe' divergono a $+\infty$)

$\log n, n, a^n, n!$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$$

inoltre

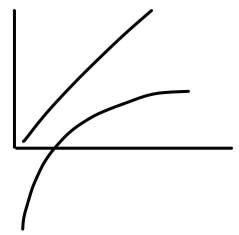
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

<u>Esercizio</u>

determinare il lim

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot \log n}$$

$\log n < x$



lezione 6/12/2023

$$\Big\{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a^n}\Big\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

e' monotona crescente

$a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \ge 1$

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

$n \to \infty$

$\to e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \qquad e \simeq 2,781$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

ESEMPIO

CALCOLARE

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$ forma indeterminata

$\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e^2$

ESEMPI

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$ 1^{∞}

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{n} = e^2$

$m = \frac{n+1}{2}$

se $n\to\infty$ anche $m\to\infty$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n}{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ $\frac{\cancel{n}(2)}{\cancel{n}(1+\frac{1}{\cancel{n}})} \to 2$

ESEMPIO

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{3}}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right)^{2/3} = e^{2/3}$

SERIE

$a_n = \frac{1}{n}$ successione $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 1/2 = 3/2$

$S_3 = 1 + 1/2 + 1/3 = 3/2 + 1/3 = 11/6$

$S_4 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 11/6 + 1/4 = 25/12$

$S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$

S_n è una nuova successione ed è la successione delle somme parziali nel senso appena descritto (successione delle ridotte

$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$
$= +\infty$

successione delle ridotte

In generale

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim S_n$

L reale (convergente) || indeterminata
$+\infty(-\infty)$ (divergente) $\nexists$

Teorema

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

è convergente, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

serie geometrica

$\{(\frac{1}{2})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n = (\frac{1}{2})^n$

$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$

$1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots$

$S_0 = 1$
$S_1 = 1 + 1/2 = 3/2$
$S_2 = 1 + 1/2 + 1/4 = 7/4$
$S_3 = 15/8$
$S_n = 1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n =$

$\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

$-1 < q < 1$

$\frac{1}{1/2} = 2$

$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = 2$

Esempio

$\sum_{n=0}^{+\infty} (1/4)^n$

$a_n = (\frac{1}{4})^n$ È una progressione geometrica di ragione 1/4

$\lim_{n\to\infty} (1/4)^n = 0$

$S_0 = 1$
$S_1 = 5/4$
$S_2 = 21/16$
$S_3 = 85/64$
$S_4 = 85/64$

la serie geometrica di ragione q e' associata alla successione q^n $q \neq 1$ dove $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$q \to 0$ sse $|q| < 1$
sse $-1 < q < 1$
in questo caso la serie converge a $1/1-q$

$(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

invece
$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ diverge se $q \geq 1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ e' indeterminata se $q < -1$

ESERCIZIO

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

converge a $\frac{1}{1-3/4} = 4$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

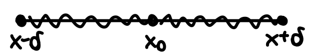
$(S_n) = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$
dove $S_0 = 1$
$S_1 = 1 + 3/4$
$S_2 = 1 + 3/4 + 9/16$
$S_3 = 1 + 3/4 + 9/16 + 27/64$

ESEMPIO

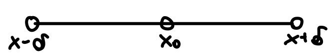
$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$ diverge

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n$ indeterminata

DEFINIZIONE
U_{x_0} si dice un intorno di x_0 se e' un qualsiasi intervallo aperto di $\mathbb{R}$ che contiene x_0
I si dice un intorno simmetrico di x_0 se e' della forma
$I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



intorno bucato $I_{x_0} \setminus \{x_0\}$



$x_0-\delta < x < x_0 \ \vee \ x_0 < x < x_0+\delta$

equivalentemente

$x_0-\delta < x < x_0+\delta \ , \ x \neq x_0$

$I(+\infty)$ intorno di $+\infty$

ed e' un insieme del tipo

$(M,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > M$ con M fissato$\}$

analogamente si definisce $I(-\infty)$ sara' un insieme del tipo $(-\infty, N) = \{x \in \mathbb{R} / x < N$ con N fissato$\}$

Definizione

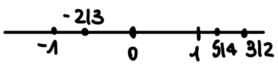
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

Definizione

$x \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice un punto di accumulazione per X, $X \subset \mathbb{R}$ sse $\forall U_{x_0}$ si ha che $U_{x_0} \cap X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Notare che x_0 non e' necessariamente $x_0 \in X$

$X = \{\frac{1}{n} + (-1)^n / n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

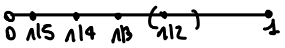


0 non e' punto di accumulazione per X

gli unici punti di acc di X sono -1 e 1

Esempio

$X = \{\frac{1}{n}\}$



0 e' l'unico punto di accumulazione di X

Esempio

$X = \mathbb{N}$

$+\infty$ e' l'unico punto di accumulazione

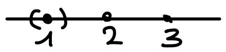
$I(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > M, M$ fissato reale$\}$

Esempio

$X = \{0\} \cup (1,+\infty)$

Esempio

$X = \{1,2,3\}$



non ha punti di acc

Definizione

$x_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$

$f: X \to \mathbb{R}$ funzione

$\text{dom} f = X$ e x_0 e' un punto di acc di X

SI DICE CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

SSE

$\forall I_L$ INTORNO DI L

$\exists I_{x_0}$ INTORNO DI x_0 tc $\forall x \in X \cap I_{x_0} \setminus \{x_0\}$ RISULTA CHE $f(x) \in I_L$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tc $\forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

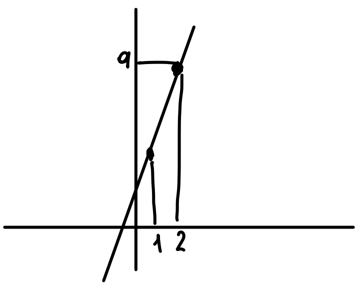
DEFINIZIONE

f CONTINUA SU $x_0 (x_0 \in \mathbb{R})$ SSE $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

OSSIA $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tc $\forall x \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ESERCIZIO

$\lim_{x \to 2} (5x - 1) = 9$

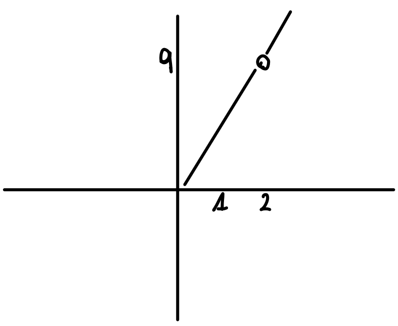


$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tc $\forall x, \ 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |5x - 1 - 9| < \varepsilon$

INFATTI

$|5x - 10| = |5(x-2)| = |5||x-2| = 5|x-2| < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \varepsilon/5$

$f(x) = \begin{cases} 5x - 1 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

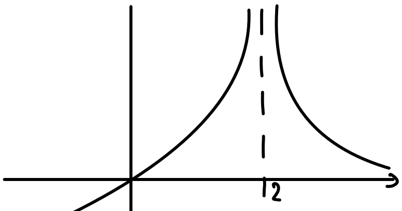
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f CONTINUA IN x_0 SSE ESISTONO

$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

(IL LIMITE $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ESISTE E SONO UGUALI, MA PUO' ANCHE ACCADERE CHE $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

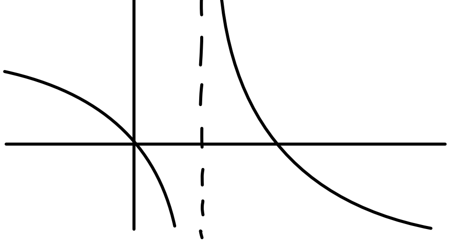
osservazione



$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty = \lim_{x \to 2^+} f(x)$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

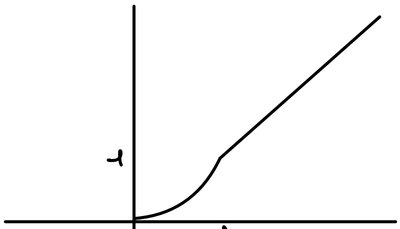
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$



ESEMPIO

$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$

$\text{dom} f = (0, +\infty)$



$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 = f(1)$

Teorema

se f e g sono continue in x allora lo sono $f+g$, fg, f/g (continue in x_0)

Teorema

tutte le funzioni elementari sono continue nel proprio dominio:

- lineari
- quadratiche (parabole)
- polinomiali
- radici
- esponenziali / logaritmiche
- razionali
- circolari e inverse
- valore assoluto

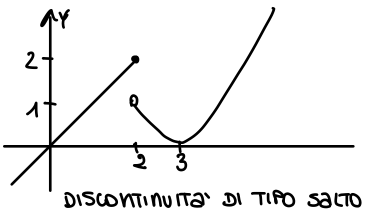
TEOREMA

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \text{dom} g$ f, g continue in x_0 allora $f \circ g$ e' continua in x_0 e $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(g(x_0))$

lezione 11\12\2023

ESERCIZIO

$f(x) = \begin{cases} x & x \le 2 \\ (x-3)^2 & x > 2 \end{cases}$



DISCONTINUITA' DI TIPO SALTO

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$

I LIMITI LATERALI SONO $\neq$

PERCIO' $\lim_{x \to 2} f(x) \nexists$ $f(2) = 2$

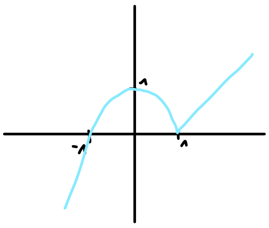
E NON E' CONTINUA IN 2

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x-3)^2 = 0 = f(3)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ESERCIZIO

$g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \le 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$



$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1-x^2 = 0$

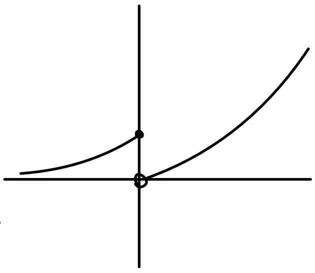
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0$

f continua su tutto $\mathbb{R}$

ESERCIZIO

$f(x) = \begin{cases} e^x + a & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

PER QUALI VALORI DI a, $a \in \mathbb{R}$ f E' CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$?



$\lim_{x \to 0^-} e^x + a = 1 + a = f(0)$

$\lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$ $\quad a = -1$

ESERCIZIO

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ a - \frac{b}{x} & x \in (2,4) \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$

DETERMINARE I VALORI DI a e b (REALI) PER CUI f E' CONTINUA SU $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 = f(2)$

$\lim_{x \to 2^+} (a - \frac{b}{x}) = a - \frac{b}{2}$ $\qquad a - \frac{b}{2} = 0 \qquad a - \frac{b}{4} = 1$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = a - \frac{b}{4}$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 1 = f(4)$

$\left.\begin{array}{l} a - b/2 = 0 \\ a - b/4 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2a - b = 0 \\ 2a - b/2 = 2 \end{array}$

$b/2 = 2 \quad b = 4 \qquad -b/2 = -2$

ESERCIZIO

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\leq 1 \\ 3(ax+1) & x>1 \end{cases}$$

$f(1)=2$

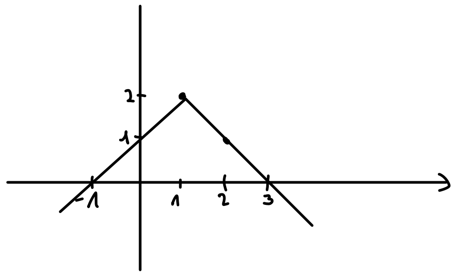
$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=3(a+1)$

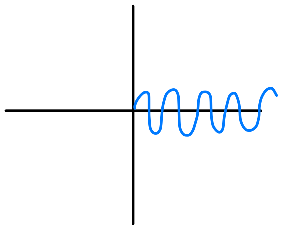
$3(a+1)=2$
$3a+3=2$
$3a=-1$
$a=-1/3$

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\leq 1 \\ 3\left(-\frac{1}{3}x+1\right) & x>1 \end{cases}$$

$-x+3$



$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \nexists$ (analogamente $\nexists \lim_{x\to+\infty} \cos x$)



LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ dom $f(x)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$ PROLUNGAMENTO PER CONTINUITÀ IN ZERO

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

INFATTI $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot(1+\cos x)$

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$ $1^2\cdot 1/2=1/2$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}=\log a$ $a>1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}=1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\log a}$ $a>0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

CALCOLO DI LIMITI

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 0$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{3^x - 1}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \Big/ \frac{3^x - 1}{x} = \frac{1}{\log 3}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2x}{\frac{e^{3x}-1}{3}\cdot 3x} = \frac{2}{3}$

Se $x\to 0$ allora $2x\to 0$, $3x\to 0$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}x/\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot \cos x$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \cos x = 1$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-2x^3+5x}{x^5-x}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^3-2x^2+5)}{\cancel{x}(x^4-1)} = \frac{5}{-1} = -5$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}5x - \operatorname{sen}3x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}5x}{5x}\cdot 5 - \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}3x}{3x}\cdot 3 = 2$

8) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{(x-1)^2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{2-x^2}-1)(\sqrt{2-x^2}+1)}{(x-1)^2(\sqrt{2-x^2}+1)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{2-x^2-1}{(x-1)^2(\sqrt{2-x^2}+1)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{(x-1)^2(\sqrt{2-x^2}+1)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x-1)(\sqrt{2-x^2}+1)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{-1\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{(x-1)}(x-1)(\sqrt{2-x^2}+1)} = \frac{-\cancel{2}}{0(\cancel{2})}$

da sx $\frac{2}{0^-} = -\infty$

da dx $\frac{2}{0^+} = +\infty$

limite $\nexists$

LEZIONE 13/12/2023

ESERCIZIO

$f(x) = (1+|\sin x|)^{1/x}$

$x_0 = 0$ DISCONTINUITA' a SALTO IN ZERO

$\lim_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{1/x}$

$e^{\lim_{x\to 0^+} \log(1+\sin x)^{1/x}}$

$e^{\lim_{x\to 0^+} 1/x \log(1+\sin x)}$

$e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}}$

$x \to 0^+$
$\sin x \to 0^+$

$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$

$= e$

$\lim_{x\to 0^-} (1-\sin x)^{1/x}$

$e^{\lim_{x\to 0^-} \log(1-\sin x)^{1/x}}$
$e^{\lim_{x\to 0^-} 1/x \log(1-\sin x)}$
$e^{\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1-\sin x)}{-\sin x} \cdot \frac{-\sin x}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ESISTONO SOLO I LIMITI LATERALI (DX E SX) ma non ESISTE IL $\lim_{x\to 0} f(x) \nexists$

ESERCIZIO

$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

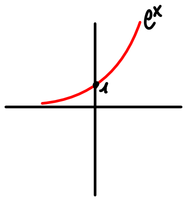
$\lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{1}{x}\right)^x$

$\lim_{x\to +\infty} x \log 1/x$

$\lim_{x\to +\infty} x(\log 1 - \log x)$

$\lim_{x\to +\infty} x(-\log x) = -\infty$

$e^{-\infty} \to 0$



CONFRONTO LOCALE

$x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$

f, g DEFINITE IN $I_{x_0} \setminus \{x_0\}$

$g(x) \neq 0$ PER $x \neq x_0$

SI STUDIA

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

SE $L \in \mathbb{R}$, ALLORA SI DIRÀ CHE $f = O(g)$ $x \to x_0$

SI DIRÀ CHE f È CONTROLLATA DA g

INFATTI

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

SE $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, SI DIRÀ CHE f È DELLO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA DI g QUANDO $x \to x_0$

$f \asymp g$ $x \to x_0$

SE $L = 1$, SI DICE CHE f È EQUIVALENTE A g

$f \sim g$ $x \to x_0$

ESEMPIO

$\sin x \sim x$ $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$e^x - 1 \sim x$ $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

SE $L = 0$, ALLORA f È TRASCURABILE RISPETTO A g QUANDO $x \to x_0$

$f = o(g)$ $x \to x_0$

ESEMPIO

$\sin x = o(x)$
$x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

PROPOSIZIONE

$f \sim g \Rightarrow f = g + o(g)$ $x \to x_0$

DIMOSTRAZIONE

$h = f - g$

$f(x) = h(x) + g(x)$

$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow h = o(g)$ $x \to x_0$ $\Leftrightarrow f - g = o(g)$ $x \to x_0$

$\Leftrightarrow f = g + o(g)$ $x \to x_0$

PROPOSIZIONE

$x \to 0$

$x^n = o(x^m) \Leftrightarrow n > m$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to 0} x^{n-m} = 0$

$\Leftrightarrow n > m$

È TRASCURABILE QUELLA DI POTENZA MAGGIORE

PROPOSIZIONE

$x^n = o(x^m)$

$x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ SSE $n < m$

ESEMPI

$x^3 = o(x) \quad x \to 0$

x^3 E' TRASCURABILE RISPETTO A x, $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

INVECE $\underset{x \to +\infty}{x = o(x^3)}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$x \to x_0$

$t = x - x_0$

$t \to 0$

SUPP $x \to 0$

a) $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$

$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$

$p = \min\{n, m\}$

b) $o(\lambda x^n) = \lambda o x^n$

$= o(x^n)$

$\lambda \neq 0$

c) $o x^n \cdot o x^n = o(x^{m+n})$

d) $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

e) $(o(x^n))^k = o(x^{kn})$

f) $\varphi(x)$ LIMITATA IN UN INTORNO DI $x = 0$, SI AVRA' $\varphi(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$

LIMITI FONDAMENTALI

$\sin x \sim x$, $x \to 0$

$\sin x = x + o(x)$, $x \to 0$

$1 - \cos x \sim 1/2\, x^2$, $x \to 0$

$1 - \cos x = 1/2\, x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$

$\log(1+x) \sim x$, $x \to 0$

$\log(1+x) = x + o(x)$, $x \to 0$

$e^x - 1 \sim x$, $x \to 0$

$e^x - 1 = x + o(x)$, $x \to 0$

$e^x = 1 + x + o(x)$, $x \to 0$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $x \to 0$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$, $x \to 0$

TEOREMA

SE $\tilde{f} \sim f$ E $\tilde{g} \sim g$, $x \to x_0$

ALLORA

$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$

TEOREMA

se $\tilde{f} = o(f)$ e $\tilde{g} = o(g)$, $x \to x_0$

allora $\lim_{x\to x_0} (f(x)+\tilde{f}(x))(g(x)+\tilde{g}(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$

e

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+\tilde{f}(x)}{g(x)+\tilde{g}(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

ESEMPIO

Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$

$x \to 0$
$2x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{1/2(2x)^2 + o(x^2)}{(3x)^2+o(x^2)} = \frac{2}{9}$

ESEMPIO

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + x^3}{4x + 5\log(1+x^2)}$

$x^3 = o(\sin 2x)$ $x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2$

$5\log(1+x^2) = o(4x)$, $x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{5\log(1+x^2)}{4x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{4}x = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + o(\sin 2x)}{4x+o(x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{4x+o(x)} = 1/2$

ESERCIZI

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-6x}-1}{5x+x^3}$

$-6x \to 0$

$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ $t \to 0$

$\alpha = 1/3$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2}-1}{\log(1-3x^2)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+o(x^2)}{-3x^2+o(x^2)} = -2/3$

3) $\lim_{x\to 0} (1+3x)^{1/4\tan x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{4\tan x}\cdot \log(1+3x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{4\tan x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x)}{4x+o(x)} = \frac{3}{4}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 7x}{1-\cos(4x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(7x^2)+o(x^2)}{1/2(4x^2)+o(x^2)} = \frac{49}{8}$$

5) $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^4 - x^2} - x^2)$

$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^4(1-1/x^2)} - x^2)$

$\lim_{x\to +\infty} x^2(\sqrt{1-1/x^2} - 1)$

$\lim_{x\to +\infty} x^2(1/2 \cdot (-1/x^2))$

$\lim_{x\to +\infty} 1/2(-1) + o(1)$

LIMITI

1) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{1+x^2}\log\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$

$x\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right) = 2$

2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\tan\frac{4}{x} - \sin\frac{2}{x^2}}{\log(1+\frac{3}{x})}$

$t = \frac{1}{x}$

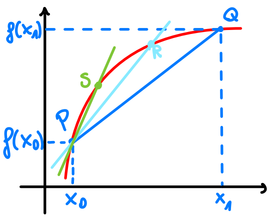
$x \to +\infty$ allora $t \to 0^+$

$\lim_{t\to 0^+} \frac{\tan 4t - \text{sen}\, 2t^2}{\log(1+3t)}$

$\lim_{t\to 0^+} \frac{4t - 2t^2 + o(t^2)}{3t + o(t)}$

$\lim_{t\to 0^+} \frac{4t + o(t)}{3t + o(t)} = \frac{4}{3}$

CALCOLO DIFFERENZIALE



$P(x_0, f(x_0))$

$Q(x_1, f(x_1))$

la retta $\overline{PQ}$:

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

Sia f definita in un intorno di x_0, $x_0 \in \mathbb{R}$, si dirà che f è derivabile in x_0 sse esiste il limite ed è finito:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ si chiama la derivata di f nel punto x_0

EQUIVALENTEMENTE FACENDO

$h = x - x_0 \quad (x = x_0 + h)$

si può riscrivere il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ESEMPIO

SE $f(x)=x^2$

$x_0 \in \mathbb{R}$ FISSO

$$\lim_{h\to0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$$

$$\lim_{h\to0} \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}$$

$$\lim_{h\to0} \frac{h(2x_0+h)}{h}=2x_0$$

se $f(x)=x^2$, allora $f'(x)=2x$

$f' =: D(f) \quad \frac{df}{dx} \quad \frac{dy}{dx}$

se $f(x)=\sin x$

$$\lim_{h\to0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$\lim_{h\to0} \frac{\sin x\cdot\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$\lim_{h\to0} \frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}$$

$$\lim_{h\to0} \frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to0} \frac{\cos x\sin h}{h}$$

$$\lim_{h\to0} \underset{1/2}{\frac{\sin x\cancel{(\cos h-1)}(-h)}{\cancel{-h^2}}}+\lim_{h\to0} \cos x\left(\overset{1}{\cancel{\frac{\sin h}{h}}}\right)$$

$$0+\cos x=\cos x$$

$f'(x)=\cos x$

se $f(x)=e^x$

$f'(x)=\,?\qquad f'(x)=e^x$

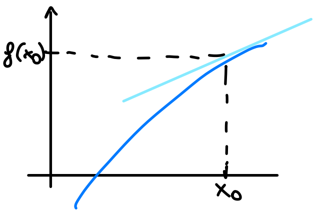
$$\lim_{h\to0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0} \frac{e^x\overset{1}{\cancel{(e^h-1)}}}{\cancel{h}}=e^x$$

LEZIONE 8/11/2024

ASINTOTI

f E' DEFINITA SU UN INTORNO DI $(+\infty)$

SE IL GRAFICO DI f TENDE A COMPORTARSI COME UNA RETTA



l: $y = mx + q$

m E' IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI l

q E' L'INTERSEZIONE CON L'ASSE y

$g(x) = y = mx + q$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx+q)) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(f(x) - mx - q)}{1} = 0$$

O PICCOLO

$f(x) - mx - q = o(1) \quad x \to +\infty$

$f(x) = \underbrace{mx + q}_{g(x)} + o(1) \quad x \to +\infty$

SI DICE CHE g E' UN ASINTOTO (DESTRO)

SE $m \neq 0$ g E' UN ASINTOTO OBLIQUO DX PER f

SE $m \neq 0$ g E' UN ASINTOTO ORIZZONTALE PER f

SI SUPPONGA CHE ESISTA UN ASINTOTO DX PER f

INNANZITUTTO DOVREBBE ACCADERE CHE

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (RAGIONAMENTO ANALOGO PER ASINTOTO SX)

$$m = \lim_{x \to +\infty} f(x)/x$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

DEVONO ESISTERE E DEVONO ESSERE FINITI

INFATTI $\lim_{x \to} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} - \lim_{x \to +\infty} q/x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

ESEMPIO

$f(x) = \log(3 + \frac{4}{x^2}) + 2x$

VERIFICARE CHE ESISTE UN ASINTOTO OBLIQUO SX

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

HA SENSO CHIEDERSI SE HA ASINTOTO OBLIQUO:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\log(3 + \frac{4}{x^2}) + 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\log 3(1 + 4/3x^2) + 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\log 3 + \log(1 + 4/3x^2) + 2x}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\log 3 + 4/3x^2 + o(1/x^2) + 2x}{x} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\log 3}{x} + \frac{2x}{x} = 2$$

$$\left(\begin{array}{l} t\to 0 \\ \log(1+t) \sim t \\ \lim_{t\to} \frac{\log(1+t)}{t} = 1 \\ \log(1+t) = t + o(t) \\ t\to 0 \end{array} \right)$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (\log(3+4/x^2) + 2x - 2x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log 3(1 + 4/3x^2)$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\log 3 + \log(1 + 4/3x^2)) = \log 3$$

$$y = \log 3 + 2x$$

ESEMPIO

$f(x) = \frac{x\cdot e^x}{1+e^x}$ VERIFICARE CHE $\exists$ ASINTOTO OBLIQUO

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot e^x}{1+e^x}$ (VERSO SX TENDE A ZERO ED È INUTILE STUDIARLA)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}+1} = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot e^x}{1+e^x} / x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\cdot e^x}{\cancel{x}(1+e^x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot e^x}{1+e^x} - 1\cdot x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x\cdot e^x} - x - \cancel{xe^x}}{1+e^x} = 0 \qquad y = x$$

ESEMPIO

SIA $f(x) = \frac{\sin x}{x} - 3x - \frac{1}{x^2}$ SX

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin}{x} - 3x - \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x^2} - \frac{3x}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m = -3$$

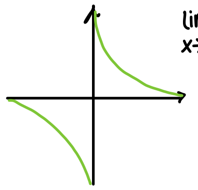
$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sin x}{x} - 3x + \frac{1}{x^2} + 3x\right)$$

$$q = 0$$

$$y = -3x$$

ASINTOTI VERTICALI

$f(x) = \frac{1}{x}$

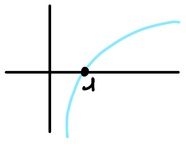


$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

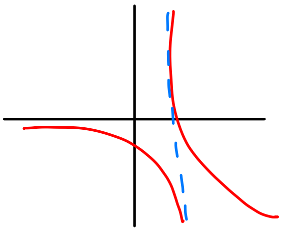
ESEMPIO

$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$



$x = 0$ E' UN ASINTOTO VERTICALE

ESEMPIO



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

ESERCIZIO (TEMA D'ESAME)

STUDIARE

$f(x) = x\cdot\log^2 x$

1) $\text{dom } f = (0,+\infty)$

2) LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$\lim_{x\to0^+} x\cdot\log^2 x$

$\lim_{x\to0^+} \frac{\log^2 x}{1/x}$

$\lim_{x\to0^+} \frac{2\log x\cdot \cancel{1/x}}{-1/x^{\cancel{2}}}$

$\lim_{x\to0^+} \frac{2\log x}{-1/x} = \log_{x\to0^+} \frac{2\cdot 1/x}{-1/x^2}$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{2\cdot 1/x}{-1/x\cdot 1/x} = \lim_{x\to0^+} -2x = 0$

MONOTONIA

$f'(x) = \log^2 x + x\cdot 2\log x\cdot 1/x$

$= \log^2 x + 2\log x$

$= \log x(\log x + 2)$

PUNTI CRITICI

$\log x = 0 \lor \log x + 2 = 0$

$x = 1 \qquad \log x = -2$

$x = e^{-2} = 1/e^2$

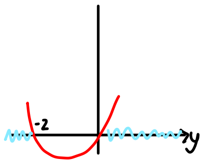
$f'(x) > 0$

$\log x(\log x + 2) > 0$

$y = \log x$

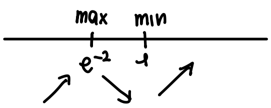
$y(y+2) > 0$

$y < -2 \lor y > 0$



$\log x < -2 \lor \log x > 0$

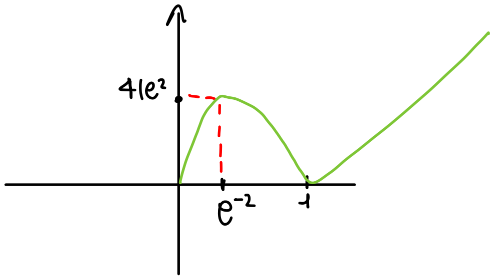
$x < e^{-2} \lor x > 1$



$(0, e^{-2})$ $f' > 0$ f E' CRESCENTE

$(e^{-2}, 1)$ $f' < 0$ f E' DECRESCENTE

$(1, +\infty)$ $f' > 0$ f E' CRESCENTE



$f(e^{-2}) = e^{-2}\cdot(\log e^{-2})^2 = e^{-2}\cdot(-2)^2 = 4e^{-2}$

$M(e^{-2}, 4/e^2)$ MASSIMO RELATIVO

$m(1,0)$ MINIMO RELATIVO

DEFINIZIONE

f SI DICE CONVESSA SE $f'(x)$ E' CRESCENTE, MENTRE SI DICE CONCAVA SE $f'(x)$ E' DECRESCENTE

OSS: PER DETERMINARE GLI INTERVALLI SE f E' CONVESSA/CONCAVA QUANDO IL SEGNO DELLA SECONDA DERIVATA

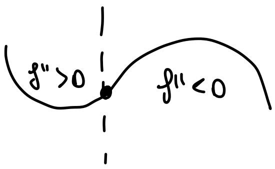
CIOE'

SE $f''(x)>0 \Rightarrow f'$ E' CRESCENTE E CONVESSA

SE $f''(x)<0 \Rightarrow f'$ E' DECRESCENTE E CONCAVA

DEFINIZIONE

I PUNTI DOVE $\exists$ f' e f'' CAMBIA DI SEGNO SI DICONO FLESSI



ESEMPIO

$f(x) = x\cdot e^{-x^2/2}$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x^2/2} = \lim_{x\to+\infty} x/e^{x^2/2} = 0$

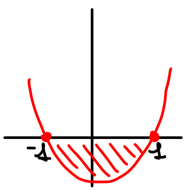
$f(-x) = -f(x)$ PERCIO' f E' DISPARI

$f'(x) = e^{-x^2/2} + x\cdot e^{-x^2/2}\cdot -2x/2$
$= e^{-x^2/2}(1-x^2)$

I PUNTI CRITICI SONO $1-x^2=0$, OVVERO 1 e -1

$f'(x)>0$ SICCOME $e^{-x^2/2}>0$

$1-x>0 \quad x^2-1<0$



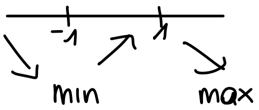
$x<-1$ f E' DECRESCENTE

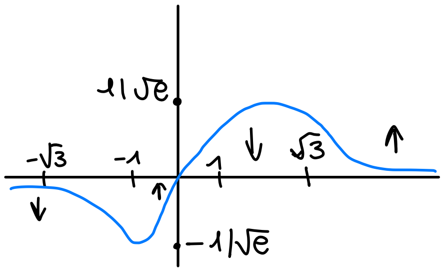
$-1<x<1$ f E' CRESCENTE

$x>1$ f E' DECRESCENTE

$f''(x) = e^{-x^2/2} \cdot -2x \cdot 1/2\,(1-x^2) + e^{-x^2/2}(-2x)$
$= e^{-x^2/2} \cdot x\,(1-x^2) + e^{-x^2/2}\,x(-2)$
$= e^{-x^2/2}\,x(x^2-1-2)$
$= e^{-x^2/2}\,x\,(x^2-3)$

I PUNTI DI FLESSO HANNO ASCISSA: $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$



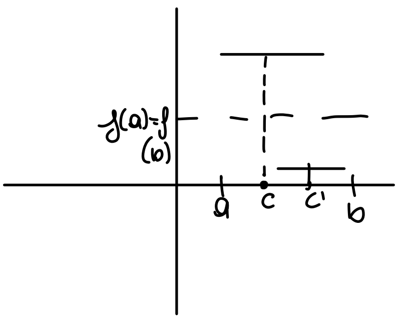


$(-\infty, -\sqrt{3})$ CONCAVA
$(-\sqrt{3}, 0)$ CONVESSA
$(0, \sqrt{3})$ CONCAVA
$(\sqrt{3}, +\infty)$ CONVESSA

ESERCIZIO X CASA
$f(x) = \arctan x^2$
dom f
LIMITE AGLI ESTREMI
MONOTONIA: EVENTUALI PUNTI DI max e min

TEOREMA DI ROLLE
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
IPOTESI
1. f CONTINUA IN $[a,b]$
2. f E' DERIVABILE IN (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

TESI: $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$



TEOREMA DI LAGRANGE
IPOTESI
1. f E' CONTINUA IN $[a,b]$
2. f E' DERIVABILE IN (a,b)

TESI: $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

OSSERVAZIONE
$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$

$x_0 = 0$ E' UN PUNTO CRITICO PER f MA $f'(0)=0$ NON IMPLICA CHE 0 SIA UN FLESSO PER f

TEOREMA DI TAYLOR

f DERIVABILE n VOLTE ATTORNO A UN PUNTO x_0, ALLORA VALE LO SVILUPPO:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

f n VOLTE DERIVABILE IN $I x_0$

$f(x) = P(x) + R \quad x \to x_0$

$x_0 = 0$ (MAC LAURIN)

$n=1$

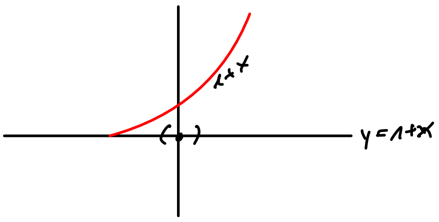
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$f(x) = e^x \quad x=0$

$e^x = e^0 + e^x | (x-0) + o(x-0)$

$e^x = 1 + 1(x) + o(x)$

$e^x = 1 + x + R \quad x \to 0$



$n=2 \quad x_0 = 0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + o(x^2)$$

$f(x_0) = e^0 = 1$; $f'(0) = e^0 = 1$

$f''(0) = 1$

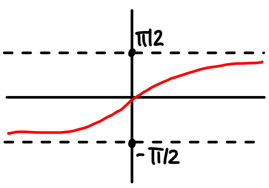
$e^x = 1 + x + 1/2 x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$

LEZIONE 10/1/2024

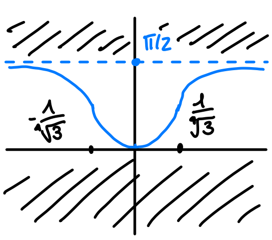
$f(x) = \arctan x^2$ $\quad$ f E' PARI $f(-x) = f(x)$

dom $f = \mathbb{R}$ $\quad$ SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE y

arctan x



$\arctan x^2$



$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right)$ f E' CONCAVO $\quad$ NON E' UNA f INIETTIVA

$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ f E' CONVESSO

ESTREMI DEL DOMINIO $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi/2 \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \pi/2$

$\arctan 0 = 0$

$y=\pi/2$ E' UN ASINTOTO ORIZZONTALE PER f

$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x$

$x_0=0$ E' UN PUNTO CRITICO PER $f \Rightarrow (0,0)$ E' UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO PER f (E ASSOLUTO)

$f'(x)>0$

SICCOME $1+x^4>0$

$2x>0 \Leftrightarrow x>0$

$(0,+\infty)$ f E' CRESCENTE

$(-\infty,0)$ f E' DECRESCENTE

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$

$f''(x)=\frac{2(1+x^4)-2x(4x^3)}{(1+x^4)^2}$

$\frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2} > 0$

$1-3x^4>0$ $\qquad (x^2)^4-1/3<0$

$x^4-1/3<0$ $\qquad t=x^2$

$-3x^4>-1$ $\qquad t^2-1/3<0$

$3x^4<1$

$x^4<1/3$

$x^4-1/3=0 \quad x^4=1/3 \quad x=\pm\sqrt[4]{1/3}=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

ESERCIZIO

$f(x)=\frac{1}{e^x-2}$

dom f $\quad e^x\neq 2 \quad \log e^x \neq \log 2 \quad$ dom $f=\mathbb{R}\setminus\{\log 2\}$

$=(-\infty,\log 2)\cup(\log 2,+\infty)$

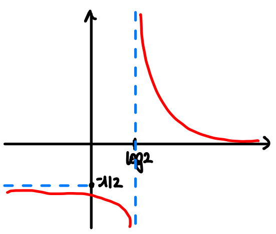
ESTREMI

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-2} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-2} = 0$

$\lim_{x\to(\log 2)^-} \frac{1}{e^x-2} \quad -\infty$

$\lim_{x\to(\log 2)^+} \frac{1}{e^x-2} \quad +\infty$



INIETTIVA

$x=\log 2$ E' UN ASINTOTO VERTICALE

$y=-1/2$ ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO

$d=0$ ASINTOTO ORIZZONTALE SINISTRO

$f'(x) = \frac{0(e^x-2)-1\cdot e^x}{(e^x-2)^2}$

$= \frac{-e^x}{(e^x-2)} > 0$? MAI

ESERCIZIO PER CASA

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$

ESERCIZIO

SCRIVERE IL POLINOMIO DI TAYLOR AL II ORDINE IN $x_0=0$ DELLA FUNZIONE $f(x)=\log(1+e^x)$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o(x^2)}$

$f(0)=\log(1+e^0)=\log 2$

$f'(x)=\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x \qquad f'(0)=1/2 = e^x/1+e^x$

$f''(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^x(e^x)}{(1+e^x)^2}$

$f''(0)=\frac{1+(1+1)-1\cdot 1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$

$\log(1+e^x)=$

$\log 2+1/2x+1/8x^2+\underset{x\to 0}{o(x^2)}$

ESERCIZIO

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^3(e^x-\cos x)}$

$f(x)=\sin x$

$x_0=0$

$g(x)=\cos x$

$\sin 0=0$

$f'(x)=\cos x \qquad f'(0)=\cos 0=1$

$f''(x)=-\sin x \qquad f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x \qquad f'''(0)=-1$

$\sin x=x-1/6x^3+o(x^3)$

$\cos x \qquad \cos 0=1$

$f'(x)=-\sin x \qquad f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x \qquad f''(0)=-1$

$f'''(x)=-\sin x \qquad f'''(0)=-1$

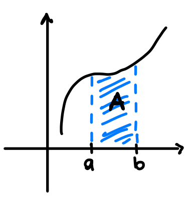
$\cos x=1-1/2x^2+\underset{x\to 0}{o(x^2)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-(x-1/6x^3+o(x^3))^2}{x^3-(1+x+o(x)-(1-1/2x^2+o(x^2)))}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-(x^2-1/3x^4+o(x^4))}{x^4+o(x^4)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1/3x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=1/3$

CALCOLO INTEGRALE



DEFINIZIONE: $I\subset\mathbb{R}$

$f: I\to\mathbb{R}$ FUNZIONE

SI CHIAMERÀ PRIMITIVA DI f UN $F: I\to\mathbb{R}$ DERIVABILE IN I tc $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$

TEOREMA

F PRIMITIVA DI f SU I, ALLORA OGNI ALTRA PRIMITIVA DI f SU I E' DATA DA $F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$
LA GENERICA PRIMITIVA DI $f(x)$ SU I SI INDICA CON
$\int f(x)dx = F(x)+c$

SI CHIAMA INTEGRALE INDEFINITO
$= \{F: I \to \mathbb{R} / F$ E' UNA PRIMITIVA DI $f\}$

$\boxed{1}$ $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$a \neq -1$

ESEMPI:
$\int x^3 dx = x^4/4 + c$
$\int x^2 dx = x^3/3 + c$
$\int x dx = x^2/2 + c$
$\int 1 \cdot dx = x + c$
$\int x^{-2} dx = x^{-1}/-1 + c = -1/x + c$
$\int x^{-2/3} dx = \int 1/\sqrt[3]{x^2} dx = \frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} + c = \frac{x^{1/3}}{1/3} + c$

$\boxed{2}$ $\int x^{-1} dx = \int 1/x \, dx$
$= \log|x| + c$ SU OGNI INTERVALLO CHE NON CONTENGA L'ORIGINE

$\boxed{3}$ $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
INFATTI $D(-\cos x + c) = \sin x$

$\boxed{4}$ $\int \cos x dx = \sin x + c$
$\boxed{5}$ $\int e^x dx = e^x + c$
$\boxed{6}$ $\int 1/1+x^2 \, dx = \arctan x + c$
$\boxed{7}$ $\int 1/\sqrt{1-x^2} \, dx = \arcsin x + c$ su $(-1,1)$

TEOREMA LINEARITA'
$\int (\alpha f(x)) + \beta g(x)) dx$
$\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$

ESEMPIO
INTEGRARE
$\int (1/2 x^3 + 3x^2 - 2 + \cos x) dx$
$1/2 \int x^3 dx + 3 + 3 \int x^2 dx - 2 \int dx + \int \cos x dx$
$= 1/2 \cdot x^4/4 + 3 \cdot x^3/3 - 2x + \sin x + c$
$= 1/8 x^4 + x^3 - 2x + \sin x + c$

$\int f \cdot g = ?$

TEOREMA INTEGRAZIONE PER PARTI
$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$
$\int \log x dx$
$\int (\log x) \cdot 1 dx$
$f(x) = \log x$ $g'(x) = 1 \cdot dx$
$f'(x) = 1/x$ $g(x) = x$

$x \cdot \log x - \int 1/x \cdot x dx$
$x \cdot \log x - \int 1 dx$
$x \cdot \log x - x + c$

$\int \log x dx = x \log x - x + c$

ESERCIZIO

$\int x \cdot e^x dx$

$f(x) = x \quad g'(x) = e^x$
$f'(x) = 1 \quad g(x) = e^x$

CAMBIO DI VARIABILI

$$\int f(\underbrace{g(t)}_{x}) \cdot \underbrace{g'(t)dt}_{dx} = \int f(x)dx$$

SI VUOLE CALCOLARE

$\int \tan x dx = \int \sin x / \cos x \cdot dx$

$t = \cos x$
$dt = -\sin x \cdot dx \quad \Rightarrow -dt = \sin x dx$

$\int -dt/t = -\int dt/t$
$= -\log|t| + C$
$= -\log|\cos x| + C$

$x \cdot \log x - \int 1/x \cdot x dx$
$x \cdot \log x - \int dx$

ESERCIZIO

$\int \cos^5 x \cdot \sin x dx$

$t = \cos x$
$dt = -\sin x dx$
$-dt = \sin x dx$

$-\int t^5 dt = -t^6/6 + C$
$= -1/6 \cos^6 x + C$

ESERCIZIO

$\int x^3 \cdot \sin x^4 \, dx$

$t = x^4$
$dt = 4x^3 dx \quad \Rightarrow 1/4 dt = x^3 dx$

$1/4 \int \sin t dt = 1/4(-\cos t) + C$

$= x/4 \cdot \cos x^4 + C$

ESERCIZIO

$\int e^{-1/3x} dx$

$dt = -1/3 dx \quad -3dt = dx$
$t = -1/3x$

$-3 \int e^t dt = -3e^t + C = -3e^{-1/3x} + C$

ESEMPIO

$\int \arctan x dx$

$f(x) = \arctan x \quad g'(x) = 1$
$f'(x) = 1/1+x^2 \quad g(x) = x$

$x \cdot \arctan x - \int \underbrace{x/1+x^2}_{*} \cdot dx$

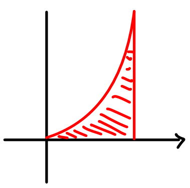
$t = 1+x^2$
$dt = 2x dx \Rightarrow 1/2 dt = x dx$

$* \; 1/2 \int dt/t = 1/2 \log|t| + C$

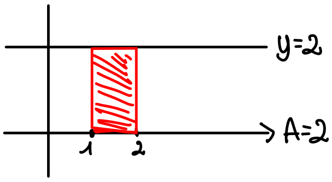
$= 1/2 \log|1+x^2| + C$
$= 1/2 \log(1+x^2) + C$

$= x \cdot \arctan x - 1/2 \log(1+x^2) + C$

CALCOLO DELLE AREE (INTEGRALI DEFINITI)



$f(x) = x^2$
$x \in [0,1]$



$$\int_1^2 2\,dx = 2x\Big|_1^2$$
$$= 2(2) - 2(1)$$
$$= 4 - 2 = 2$$