Formulario – Istituzioni di Matematiche

1 Calcolo vettoriale

- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale standard nello spazio: $(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.
- Un punto $P \in S_3$ si può porre in corrispondenza biunivoca con:
  - la terna delle sue coordinate cartesiane: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
  - il segmento orientato $\overrightarrow{OP} \in S_3 \times S_3$,
  - il vettore geometrico $\vec{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \in V_3$.
- **Prodotto scalare** di $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.
- **Norma** di $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.
- Se $\theta \in [0, \pi]$ è l'**angolo** formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$, allora $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$.
- **Proiezione ortogonale** di $\vec{u}$ su $\vec{v}$: $P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.
- **Ortogonalità**: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- **Parallelismo**: $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = t\vec{v}$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.
- **Prodotto vettoriale** di $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \hat{k} = (u_y v_z - u_z v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x).$$

- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono paralleli e formano un **angolo** $\theta \in (0, \pi)$, allora $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$. Il modulo di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ misura perciò come l'area del parallelogramma generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Inoltre, la direzione di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è perpendicolare al piano generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e il verso di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è quello per cui $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ è una terna destrorsa.
- **Test di parallelismo**: $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- **Distanza** tra $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$: $d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

2 Geometria analitica

- Forma parametrica della retta r passante per $Q = (x_0, y_0, z_0)$ e diretta come $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$P = (x, y, z) \in r \iff P = Q + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R} \iff r : \begin{cases} x = x_0 + t v_x \\ y = y_0 + t v_y \\ z = z_0 + t v_z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Forma parametrica del piano π passante per $Q = (x_0, y_0, z_0)$ e generato da $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$P = (x, y, z) \in \pi \iff P = Q + t\vec{u} + s\vec{v},\ t, s \in \mathbb{R} \iff \pi : \begin{cases} x = x_0 + t u_x + s v_x \\ y = y_0 + t u_y + s v_y \\ z = z_0 + t u_z + s v_z \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

• Forma cartesiana del piano π passante per $Q = (x_0, y_0, z_0)$ e perpendicolare a $\vec{n} = (a, b, c)$:

$$P = (x, y, z) \in \pi \iff (P - Q) \cdot \vec{n} = 0 \iff \pi : ax + by + cz = d, \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

• Distanza tra il punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ e il piano $\pi : ax + by + cz = d$:

$$d(Q, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3 Algebra lineare

• **Rango** $\rho(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$: numero di pivot di una qualsiasi matrice ridotta a scala equivalente a A. In generale, $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$.

• **Prodotto di matrici**: se $A \in \mathbb{R}^{m,k}$ e $B \in \mathbb{R}^{k,n}$, allora $AB \in \mathbb{R}^{m,n}$ è definita da

$$[AB]_{ij} = A_i B^j = \sum_{\ell=1}^{k} A_{i\ell} B_{\ell j}.$$

Se A, B sono invertibili, allora AB è invertibile è $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

• **Trasposizione**: se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ allora $A^\top \in \mathbb{R}^{n,m}$ è tale che $[A^\top]_{ij} = A_{ji}$.
Inoltre $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ e $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

• Sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \iff \qquad AX = B,$$

dove $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, $X = (x_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{R}^{n,1}$ è la colonna delle incognite e $B = (b_i)_{1\leq i\leq m} \in \mathbb{R}^{m,1}$ è la colonna dei termini noti.

• **Teorema di Rouché-Capelli.** Siano $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,1}$ rispettivamente la matrice dei coefficienti e quella dei termini noti di un sistema lineare. Sia $A|B \in \mathbb{R}^{m,n+1}$ la matrice completa del sistema.

1. Il sistema è compatibile se e solo se $\rho(A) = \rho(A|B)$.
2. Se il sistema è compatibile, allora le soluzioni dipendono da $n - \rho(A)$ parametri liberi.

• **Formula di Laplace** per il determinante di $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sviluppato lungo la riga i-sima:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^c_{ij}),$$

dove $A^c_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ è la sottomatrice di A ottenuta sopprimendo la riga i-sima e la colonna j-sima.

• Proprietà del determinante: se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, con A invertibile,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B), \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \qquad \det(B^\top) = \det(B).$$

• **Test di invertibilità.** $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è invertibile $\iff \rho(A) = n \iff \det(A) \neq 0$.

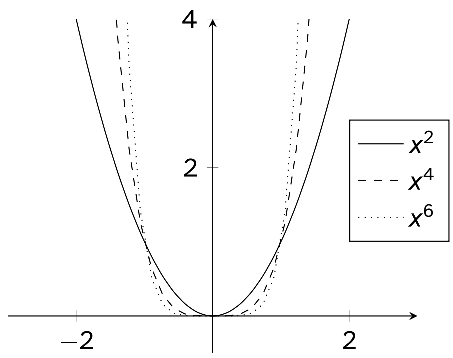
• Formula di Laplace per la matrice inversa di $A \in \mathbb{R}^{n,n}$: $[A^{-1}]_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j}\det(A^c_{ij})}{\det(A)}$.

• Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è invertibile e $(A|I) \rightsquigarrow (I|B)$ mediante metodo di eliminazione di Gauss, allora $B = A^{-1}$.

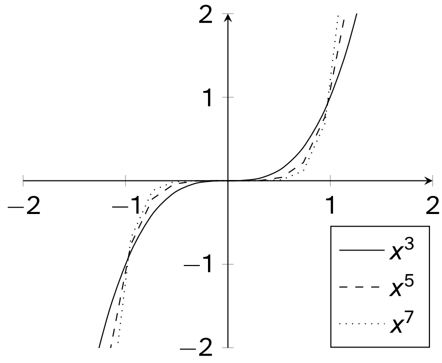
• **Teorema di Cramer.** Siano $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,1}$ rispettivamente la matrice dei coefficienti e quella dei termini noti di un sistema lineare quadrato $AX = B$. Il sistema ha soluzione unica se e solo se $\det A \neq 0$. Le soluzioni sono date dalla formula di Cramer:

$$X_i = \frac{\det(A^{i\to B})}{\det(A)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

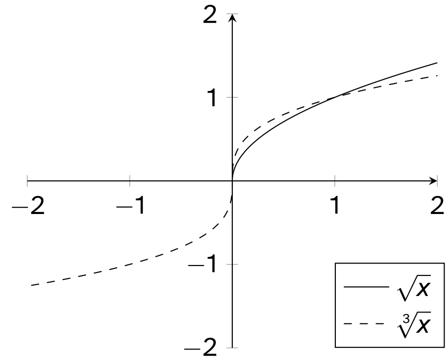
4 Funzioni elementari



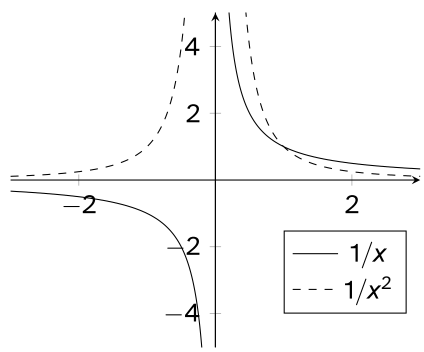
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ pari



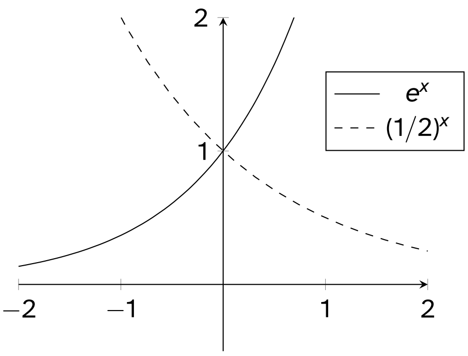
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_+$ dispari



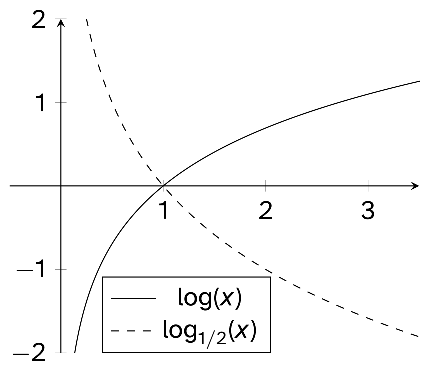
$f(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}_+$



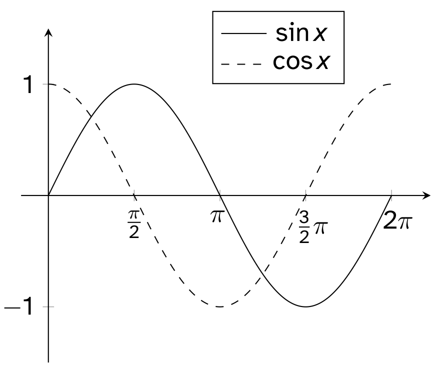
$f(x) = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}_+$

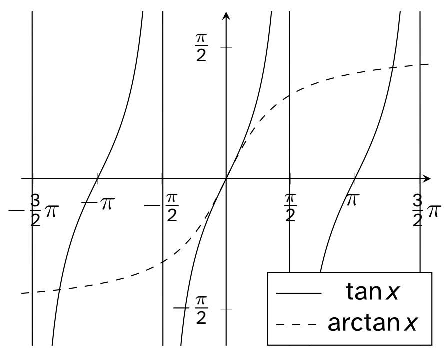


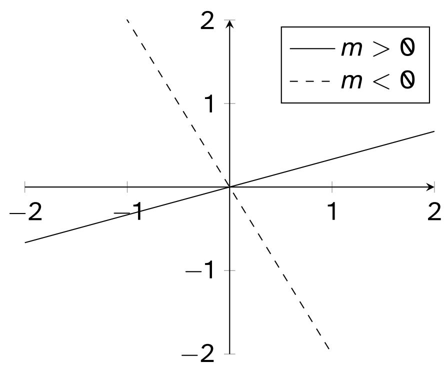
$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



$f(x) = \log_a(x)$







$f(x) = mx$

5 Regole di derivazione

$$Dx^r = rx^{r-1}\ (r \in \mathbb{R}), \qquad D\sin x = \cos x, \qquad D\cos x = -\sin x,$$

$$De^x = e^x, \qquad D\log|x| = \frac{1}{x}, \qquad D\tan x = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

- Linearità della derivazione: $D(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x)$.
- Derivata della funzione prodotto: $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Derivata della funzione rapporto: $D\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.
- Derivata della funzione composta: $D(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$.

6 Limiti notevoli, derivabilità

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (a\in\mathbb{R}),\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^r}=+\infty\quad (r\in\mathbb{R},\ a>1),\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{\log_a x}=+\infty\quad (r>0, a>1)$$

• **Teorema "tappabuchi".** Se $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}$ è continua in x_0 e derivabile in $\mathring{U}(x_0)$, allora $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x)$ se tale limite esiste finito.

• **Retta tangente** al grafico di f (derivabile) in x_0: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

7 Sviluppi di Taylor notevoli per $x\to 0$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\qquad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1}),\qquad \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),\qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

8 Regole di integrazione

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}+c\quad (r\neq 1),\qquad \int\frac{1}{x}dx=\log|x|+c,\qquad \int e^x dx = e^x+c$$

$$\int\cos x dx = \sin x + c,\qquad \int \sin x dx = -\cos x + c\qquad \int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x + c$$

• **Teorema fondamentale del calcolo.** Sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia g una qualsiasi primitiva di f su $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(t)dt = [g(t)]_a^b = g(b)-g(a).$$

• **Media integrale** di f in $[a,b]$: $(b-a)^{-1}\int_a^b f(x)dx$.

• Monotonia dell'integrale definito. Se $f(x)\le g(x)$ per $a\le x\le b$ allora $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

• Linearità dell'integrazione: $\int(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int f(x)dx+\mu\int g(x)dx$.

• **Integrazione per parti**: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$.

• **Integrazione per sostituzione**: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(y)dy$

• **Integrale improprio** di $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ localmente integrabile:

$$\int_a^b f(x)dx = \ell_{a,c}+\ell_{c,b},\qquad \text{dove } \ell_{a,c}=\lim_{x\to a^+}\int_x^c f(t)dt,\quad \ell_{c,b}=\lim_{x\to b^-}\int_c^x f(t)dt.$$

• $\int_1^{+\infty}t^{-\alpha}dt$ converge se e solo se $\alpha>1$, mentre $\int_0^1 t^{-\alpha}dt$ converge se e solo se $\alpha<1$.

• **Criterio del confronto asintotico.** Siano $f,g\colon(a,+\infty)\to[0,+\infty)$ localmente integrabili, e $c>a$.

- Se $f(x)\sim g(x)$ per $x\to+\infty$, allora $\int_c^{+\infty}f(t)dt$ e $\int_c^{+\infty}g(t)dt$ hanno lo stesso carattere.
- Se $f(x)\sim g(x)$ per $x\to a^+$, allora $\int_a^c f(t)dt$ e $\int_a^c g(t)dt$ hanno lo stesso carattere.

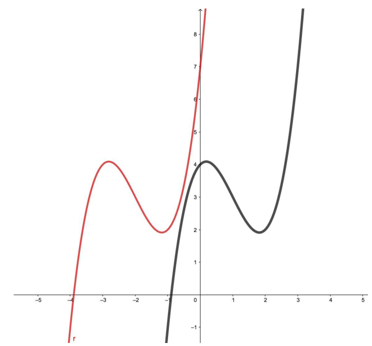
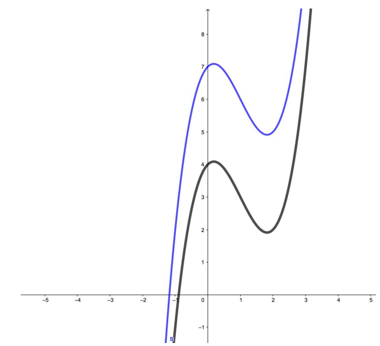
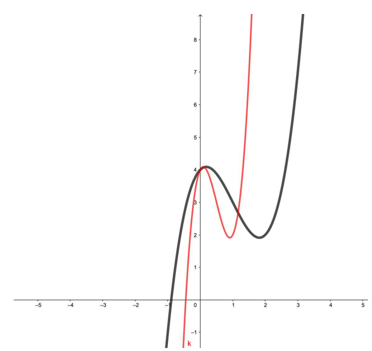
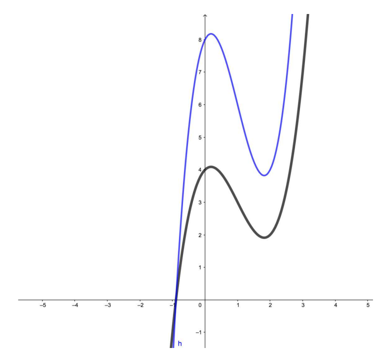
• Volume di solido di rotazione (attorno all'asse x): $V=\int_a^b \pi f(x)^2dx$.

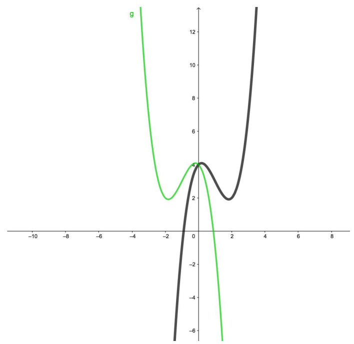
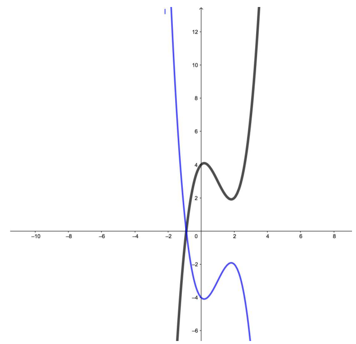
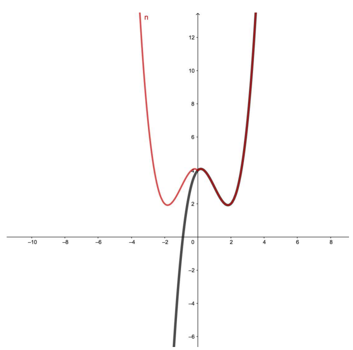
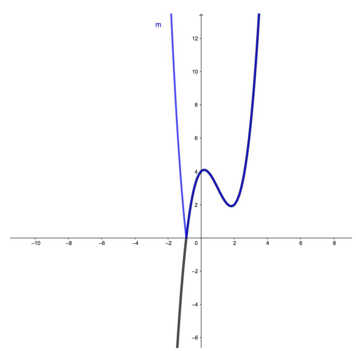
• Volume di solido di rotazione (attorno all'asse y): $V=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$.

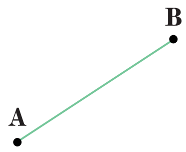
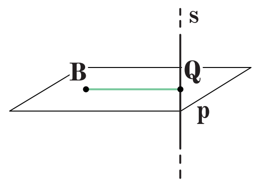
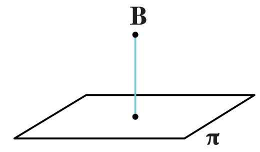
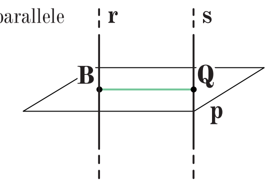
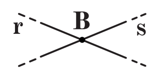
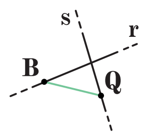
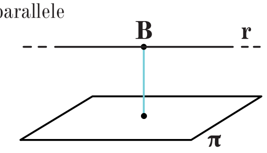
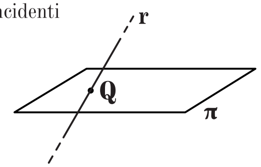
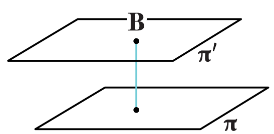
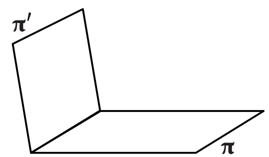
• Lunghezza d'arco: $L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.

TRASFORMAZIONI DI GRAFICI

La tabella riassume alcune trasformazioni del grafico di una funzione y=f(x). Nella tabella il grafico di f(x) è sempre disegnato in nero mentre il grafico delle varie trasformate è colorato.

Movimenti lungo asse x	Movimenti lungo asse y
f(x) ⟶ f(x + c) Traslazione del grafico lungo asse x, verso destra se c<0, verso sinistra se c>0.  Fig 1.a f(x+3) in rosso	f(x) ⟶ f(x) + c Traslazione del grafico lungo asse y, verso il basso se c<0, verso l'alto se c>0.  Fig 1.b f(x)+3 in blu
f(x) ⟶ f(ax) Dilatazione del grafico lungo asse x, espansione se 0<a<1, compressione se a>1.  Fig 2.a f(2x) in rosso	f(x) ⟶ af(x) Dilatazione del grafico lungo asse y, espansione se a>1, compressione se 0<a<1.  Fig 2.b 2f(x) in blu

Movimenti lungo asse x	Movimenti lungo asse y
f(x) ⟶ f(-x) Ribaltamento del grafico rispetto all'asse y.  Fig 3.a f(-x) in rosso	f(x) ⟶ - f(x) Ribaltamento del grafico rispetto all'asse x.  Fig 3.b -f(x) in blu
f(x) ⟶ f(|x|) Si considera il grafico di f(x) per x>0 e lo si ribalta rispetto all'asse delle y.  Fig 4.a f(|x|) in rosso	f(x) ⟶ |f(x)| Si ribaltano le porzioni di grafico che hanno f(x)<0, rispetto all'asse delle x.  Fig 4.b |f(x)| in blu

DISTANZE nello spazio	$\mathbf{A}\ (x_A, y_A, z_A)$	$s \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$	$\boldsymbol{\pi}: ax+by+cz+d=0$
$\mathbf{B}\ (x_B, y_B, z_B)$	 $d(\mathbf{A},\mathbf{B})=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$	 tracciare il piano $\mathbf{p} \perp \mathbf{s}$, per $\mathbf{B}$ $\mathbf{p} \cap \mathbf{s} = \mathbf{Q}$ $d(\mathbf{B},\mathbf{s}) = d(\mathbf{B},\mathbf{Q})$ $d(\mathbf{B},\mathbf{Q}) = \sqrt{(x_Q-x_B)^2+(y_Q-y_B)^2+(z_Q-z_B)^2}$	 $d(\mathbf{B},\boldsymbol{\pi}) = \frac{\lvert ax_B+by_B+cz_B+d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
$r \begin{cases} x = x_B + \alpha' t \\ y = y_B + \beta' t \\ z = z_B + \gamma' t \end{cases}$		parallele  scegliere $\mathbf{B} \in \mathbf{r}$ determinare $\mathbf{p} \ni \mathbf{B}, \perp \mathbf{r}$ $\mathbf{p} \cap \mathbf{s} = \mathbf{Q}$ $d(\mathbf{r},\mathbf{s}) = d(\mathbf{B},\mathbf{Q}) = \sqrt{(x_Q-x_B)^2+(y_Q-y_B)^2+(z_Q-z_B)^2}$ incidenti  $d(\mathbf{r},\mathbf{s})=0$ sghembe  determinare $\mathbf{B} \in \mathbf{r}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbf{s}$ con $\mathbf{BQ} \perp \mathbf{r}$, $\mathbf{BQ} \perp \mathbf{s}$ $d(\mathbf{B},\mathbf{Q}) = d(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \sqrt{(x_Q-x_B)^2+(y_Q-y_B)^2+(z_Q-z_B)^2}$	parallele  $\mathbf{r} // \boldsymbol{\pi}$ scelgiere $\mathbf{B} \in \mathbf{r}$ $d(\mathbf{r},\boldsymbol{\pi}) = d(\mathbf{B},\boldsymbol{\pi})$ $d(\mathbf{B},\boldsymbol{\pi}) = \frac{\lvert ax_B+by_B+cz_B+d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ incidenti  $\mathbf{r} \cap \boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{Q}$ $d(\mathbf{r},\boldsymbol{\pi})=0$
$\boldsymbol{\pi}': a'x+b'y+c'z+d'=0$			parallele  $\boldsymbol{\pi} // \boldsymbol{\pi}'$ prendere $\mathbf{B} \in \boldsymbol{\pi}'$ $d(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}') = d(\mathbf{B},\boldsymbol{\pi})$ $d(\mathbf{B},\boldsymbol{\pi}) = \frac{\lvert ax_B+by_B+cz_B+d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ incidenti  $d(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}')=0$