MATRICI

LE MATRICI

23 - 09 - 2024

DEF: dati $m, n \in \mathbb{N}$ (numeri naturali) con $m, n \geq 1$ si definisce una MATRICE $m \times n$ a coeff. reali (o complessi) una TABELLA ORDINATA di $m \times n$ numeri reali o complessi disposti su m RIGHE e n COLONNE.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

RIGA
COLONNA

2×2 — RIGHE, COLONNE

2×2 CON ELEMENTI COMPLESSI

2×3 PRIMA RIGHE POI COLONNE

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}$

3×4

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \to 0_{m \times n}$

2×2

MATRICE NULLA

Oss: Per indicare le matrici si usano le lettere MAIUSCOLE
Per i coefficienti (detti anche elementi) si usano lettere MINUSCOLE con 2 pedici indicanti la posizione (RIGA e COLONNA)

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \dots a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,n} \end{pmatrix} \to$$

il singolo elemento è chiamato con $a_{i,j}$ dove i va da 1 a m e j va da 1 a n

COLONNA

RIGA

si può scrivere anche

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ (coeff. reali)} \quad \in \mathbb{C}^{m \times n} \text{ (coeff. complessi)}$$

DEF: L'INSIEME DELLE MATRICI $m \times n$ si denota con $\mathbb{R}^{m \times n}$ (o $\mathbb{C}^{m \times n}$)

MATRICI PARTICOLARI:

1) $A \in \mathbb{R}^{1 \times 4} \to A = (1\ 2\ 3\ 4)$ $A \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ → MATRICE RIGA ovvero di dimensione $1 \times n$ con $n \geq 1$

2) $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. → MATRICE COLONNA ovvero di dimensione $m \times 1$ con $m \geq 1$

3) Una MATRICE si dice RETTANGOLARE se $m \neq n$ cioè n° righe ≠ n° colonne

4) Si dice QUADRATA DI ORDINE n se n° righe e n° colonne coincidono → $m = n$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ RETTANGOLARE $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ QUADRATA

DEF: Data una matrice quadrata si definisce DIAGONALE PRINCIPALE l'insieme dei coefficienti $a_{i,j}$ con $i=j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & \vdots \\ a_{n,1} & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

DIAGONALE DI A

OSS: $a_{i,j}$ con $i>j$ sono gli elementi sotto la diagonale

$a_{i,j}$ con $i<j$ sono gli elementi sopra la diagonale

DEF: Una matrice quadrata di ordine n si dice MATRICE DIAGONALE se tutti i coeff. fuori dalla diagonale sono nulli.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEF: Si chiama MATRICE IDENTITÀ DI ORDINE n (I_n) la matrice quadrata avente tutti gli elementi sulla diagonale pari a 1.

$$I_n \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad I_n = (a_{i,j})_{i,j=1\dots n} \quad \text{con} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Es:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se gli elementi al di sotto della diagonale sono pari a zero si definisce MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE, se sono quelli sopra uguali a zero si definisce MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

Es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$i<j$
INFERIORE

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

INFERIORE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Si dice che una matrice quadrata è SIMMETRICA se $a_{i,j} = a_{j,i}$ cioè i suoi elementi sono simmetrici rispetto la DIAGONALE PRINCIPALE.

ANTISIMMETRICA: si dice antisimmetrica quando la forma è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero gli elementi simmetrici rispetto la diagonale sono anche opposti

OPERAZIONI FRA MATRICI

- **UGUAGLIANZA FRA MATRICI**: 1) $A = B$ se hanno stessa dimensione $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

  2) I coefficienti nella stessa posizione coincidono $\to a_{i,j} = b_{i,j} \ \forall i = 1 \dots m$ e $j = 1 \dots n$

Es: $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ $\to$ NO xché hanno dimensione diversa

$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ $A = B$ se $a_{1,1} = b_{1,1}$ ecc...

TRASPOSTA: si indica con A^T. In pratica le RIGHE diventano COLONNE e viceversa

Es: 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

2) $a_{1,2} = 1$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \end{pmatrix}$ diventa matrice riga

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ LA DIAGONALE RIMANE FISSA

3) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$C = \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \to C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

PROPRIETÀ: $(A^T)^T = A$ se traspongo 2 volte torno a quella di partenza

Es: $(C^T)^T = (1 \ 2 \ 0) = C$

<u>Oss</u>: $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = D$

$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $E^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -E$

$\to$ si possono usare x vedere se è SIMMETRICA o ANTISIMMETRICA

<u>SIMMETRICA</u>: $A^T = A$

<u>ANTISIMMETRICA</u>: $A^T = -A$

SOMMA TRA MATRICI:

$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad B\, (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & \vdots \\ & & & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Es: $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = (2\ 3\ 1) \quad 2A + C \rightarrow$ NO

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 2A + C^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

- **PROPRIETÀ:**

$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1) $A + B = B + A$ COMMUTATIVA
2) $(A+B)+C = A + (B+C)$ ASSOCIATIVA
3) $(A+B)^T = A^T + B^T$
4) $A + O_{m \times n} = A$ ELEMENTO NEUTRO
5) $A - A = O_{m \times n}$

$A - (-A) = O_{m \times n}$

ESERCIZIO:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ SIMMETRICA ANTISIMMETRICA

$$(A + A^T) + (A - A^T) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A \rightarrow (A + \cancel{A^T}) + (A - \cancel{A^T}) = 2A$$

Qualsiasi matrice quadrata può essere scomposta:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{SIMMETRICA}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{ANTISIMMETRICA}}$$

PRODOTTO PER UNO SCALARE: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1n} \\ & & & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda A = 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

PRENDO OGNI ELEMENTO e moltiplico x 2

$\lambda = 2$

$$\lambda = -1 \qquad (-1)A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Se A è ANTISIMMETRICA $a_{i,j} = a_{j,i}$

PROPRIETÀ:

1) $(\lambda \mu) A = \lambda(\mu A)$ ASSOCIATIVA
2) $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$ DISTRIBUTIVA
3) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ DISTRIBUTIVA
4) $1(A) = A$ ELEMENTO NEUTRO
5) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
6) $\lambda A = 0_{m \times n} \xrightarrow{\text{si può se}} \lambda = 0$, $A = 0_{m \times n}$

Es: $\lambda = 2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\lambda \mu) A = \lambda(\mu A) \rightarrow (-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{SIMMETRICA}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{ANTISIMMETRICA}}$$

PRODOTTO FRA MATRICI:

DEF PRODOTTO TRA MATRICE RIGA e MAT. COLONNA:
Date $R=(r_{1,j}) \in \mathbb{R}^{1\times p}$ (MATRICE RIGA) e $C=(c_{i,1}) \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ (MATRICE COLONNA) il prodotto $R\cdot C$ è una matrice di dimensione 1×1 (uno scalare) dato da:

$$R\cdot C = (r_{1,1} \; r_{1,2} \; r_{1,3} \dots r_{1,p}) \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ c_{3,1} \\ \vdots \\ c_{p,1} \end{pmatrix} = r_{1,1}c_{1,1} + r_{1,2}c_{2,1} \dots$$

ESEMPIO: $R = (1 \; 2 \; 0 \; -2) \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

n° COLONNA = RIGA n°

$\underset{1\times 4}{R} \cdot \underset{4\times 1}{C} = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 0(-1) + (-2)3$

uguali posso fare

$= 2 + 0 + 0 - 6 = -4$

Quindi: $A \in \mathbb{R}^{m\times p} \qquad B \in \mathbb{R}^{p\times n}$

$$A\cdot B \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$m\times p \quad p\times n$

$$A\cdot B = (R_i(A)\, C_j(B))_{i,j}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A\cdot B = NO$

$B\cdot A = SI$ $\quad\Rightarrow\quad$ $AB \neq BA$

$(A+B)(A-B) =$
$AA + BA - AB - BB$

$n\times n \quad n\times n$

$m\times n \quad m\times n$
solo se
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

PROPRIETÀ:

1) $(AB)C = A(BC)$ ASSOCIATIVA
2) $\underset{m\times n}{A}\underset{n\times n}{I} = A \qquad \underset{m\times m}{I}\cdot \underset{m\times n}{A} = A$
3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4) $(A+B)C = AC + BC$
5) $A(B+C) = AB + AC$
6) $(AB)^T = B^T A^T$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$2\times 3 \qquad 2\times 2$

$2\times 2 \quad 2\times 3$

$AB \Rightarrow NO$

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 0 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 0 & 3\cdot 1 + 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ES. TEMA ESAME:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

DETERMINARE x TALE CHE $AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 2+18 & -9+3 \\ -4-6x & 18-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -6 \\ -4-6x & 18-x \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2+18 & -6-9x \\ -6+2 & 18-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -6-9x \\ -4 & 18-x \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & -6 \\ -4-6x & 18-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -6-9x \\ -4 & 18-x \end{pmatrix} = BA$$

$$\left|\begin{array}{ll} 20 = 20 & \\ -6 = -6-9x & x = 0 \\ -4-6x = -4 & x = 0 \\ 18-x = 18-x & x = 0 \end{array}\right| \rightarrow x = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{calcola } 2A^T + B$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A^T + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1/3 \\ 4 & 19/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 + 10 + 3 + 0 = 23$$

25-09-2024

DETERMINANTE DI UNA MATRICE:

DEF: Il DETERMINANTE DI MATRICE QUADRATA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è un NUMERO REALE $\in \mathbb{R}$ che si indica con det(A) o |A|, associato ad A

Il determinante SI CALCOLA IN BASE alla DIMENSIONE della MATRICE

- $n = 1 \to A \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \to A = (a_{1,1}) \to \det(A) = |A| = a_{1,1}$ (uguale a se stesso)

Es: $A = [5] \to \det(A) = 5 \to$ è il numero stesso

- $n = 2 \to A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \to A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \to \det(A) = \underline{a_{1,1} \cdot a_{2,2}} - \underline{a_{1,2} \cdot a_{2,1}}$

Es: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \to \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{-3}_{3 \cdot (-1)} - 2 \cdot 0 = -3$

- $n \geq 3$ prima di definire det(A) $\to$ SOTTOMATRICE

DEF SOTTOMATRICE: data una qualunque matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una SOTTOMATRICE di A si ottiene ELIMINANDO 1 o PIÙ RIGHE/COLONNE DI A. In particolare, $A_{i;j}$ è la SOTTOMATRICE DI A a CUI HO TOLTO la RIGA i e la COLONNA j.

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$A_{(1;2,4)} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

USO IL ";" x INDICARE PRIMA DEL ";" LE RIGHE CHE TOLGO e DOPO LE COLONNE

$A_{(3,4;1)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

DEF: Si dice MINORE DI UNA MATRICE qualunque $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è il det di una delle SOTTOMATRICI QUADRATE di A

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

$A_{(1;4)} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \to M_{1;3} = \det(A_{(1;3)}) \to$ TOLGO LE RIG./COL. e POI CALCOLO IL det.

Si può dimostrare che una matrice quadrata di ordine n ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) ha n^2 sottomatrici di dimensione (n-1) ognune con il suo minore.
Ad esempio $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ha 9 sottomatrici di dimensione 2.

DEF: data una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definisce COMPLEMENTO ALGEBRICO $A_{i;j} \in \mathbb{R}$ tale che: $A_{i;j} = (-1)^{i+j} M_{i;j}$ dove $M_{i;j}$ è il minore della sottomatrice quadrata $A(i;j)$ ottenuta da A togliendo la riga i e la colonna j.

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow$ calcola il complemento algebrico $A_{1;1}$

$$A_{1;1} = (-1)^{1+1} \cdot M_{1;1} = 1 \cdot M_{1;1} = 1 \cdot (-3) = -3$$

$$M_{1;1} = \det(A_{(1;1)}) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = 45 - 48 = -3$$

Es: $A_{2;3} = (-1)^{2+3} \cdot M_{2;3} = -1 \cdot \det(A_{(2;3)}) =$
$$(-1) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right) = -1 \cdot (8 - 14) = -6$$

Utilizziamo quanto visto per calc. il det di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$ usando la FORMULA DI LAPLACE x CALCOLARE IL DETERMINANTE

- Si sceglie una riga o colonna
- Si CALCOLA LA SOMMA DEI PRODOTTI tra gli ELEMENTI DELLA RIGA o COLONNA e il COMPLEMENTO ALGEBRICO CORRISPONDENTE DELLA SOTTOMATRICE DI A TOGLIENDO AD A LA RIGA e COLONNA CORRISPONDENTI AGLI INDICI DELL'ELEMENTO

In FORMULE: $\det(A) = |A|$
- $\rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i;j} A_{i;j}$ se ho scelto una RIGA
- $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i;j} A_{i;j}$ se ho scelto una COLONNA

Es: RIGA SCELTA

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1;j} A_{1;j} =$

n° elementi nella riga / dim. matrice (3x3)

$$= a_{1,1} A_{1,1} + a_{1,2} A_{1,2} + a_{1,3} A_{1,3} =$$

$$= a_{1;1} (-1)^{1+1} M_{1;1} + a_{1;2} (-1)^{1+2} M_{1;2} + a_{1;3} (-1)^{1+3} M_{1;3} =$$

$$= 1 \cdot 1 \det(A_{(1;1)}) + 2 (-1) \det(A_{(1;2)}) + 4 \cdot 1 \det(A_{(1;3)})$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 14 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= (98 - 88) - 2(70 - 72) + 4(55 - 63) = -18$$

COME CALCOLO IL DETERMINANTE:

1) SCRIVO LA FORMULA
2) SOSTITUISCO GLI ELEMENTI
3) SOSTITUISCO IL COMP. ALGEBRICO CON IL MINORE
4) SOSTITUISCO IL MINORE CON IL DETERMINANTE
5) TOLGO LE RIGHE e COLONNE ALLA MATRICE
6) FACCIO I CALCOLI

— COLONNA SCELTA

Es:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i;j} A_{i;j} = \sum_{i=1}^{3} a_{i;2} A_{i;2} = a_{1;2}A_{1;2} + a_{2;2}A_{2;2} + a_{3;2}A_{3;2} =$$

n° colonna

$$= 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} + 7(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} + 11(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)(5 \cdot 14 - 72) + 7(14-36) - 11(8-20) = 4 - 154 + 132 = -18$$

Es:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 25 & 2 \\ 0 & -100 & 3 \end{bmatrix} =$$

SCELTA CON + 0 = ES + SEMPLICE

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$\det(A) = a_{1;1}A_{1;1} + a_{1;2}A_{1;2} + 0 + 0 = 1(-1)^{1+1}M_{1;1} + (-1)(-1)^{1+2}M_{1;2} =$$

$$= M_{1;1} + M_{1;2} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)(6-0) - 1(8-6) = -6-2 = -8$$

$$1(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-4-2) + (-1)(10+4) =$$
$$= 6 - 14 = -8$$

$$= -8 - 8 = -16$$

OSS: come colonna conviene quella con + elementi nulli (0).

PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI:

1) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ → TEOREMA DI BINET

2) sia $A^{n\times n} \Rightarrow \det(A) = \det(A^T)$

3) se una matrice $A^{n\times n}$ con tutti gli elementi nulli $\Rightarrow \det(A)=0$

DEF: una MATRICE A DET. NULLO è detta SINGOLARE e NON è INVERTIBILE

4) sia $A^{n\times m}$ e $B^{n\times n}$ ottenuta da A scambiando coppie di righe o colonne ⇒
⇒ $\det(B) = (-1)^s \det(A)$ dove $s =$ n° SCAMBI EFFETTUATI

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(A) = -2$

$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(B_1) = (-1)^1 \cdot (-2) = 2$ $(s=1)$
$(-1)^s \det(A)$

$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(B_2) = (-1)^2 (-2) = -2$ $(s=2)$ → scambi da A a B2 sono 2

5) se una MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ha 2 o + RIGHE/COLONNE UGUALI O LINEARMENTE DIPENDENTI ALLORA HA DET. NULLO (0)

DEF: in una matrice 1 RIGA/COLONNA è detta LINEARMENTE DIPENDENTE delle altre SE È UNA COMBINAZIONE LINEARE delle altre.

↓

VUOL DIRE SE È UNA SOMMA O PRODOTTO DELLE ALTRE

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ → $\det(A) = 0$

LIN. DIPENDENTE
xchè è la 1ª + 2ª RIGA
1+2=3 / 2+0=2 / 3+1=4

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ $R_3 = 2 \cdot R_1 + R_2$
$\det(B) = 0$

— $\underbrace{[(1\cdot 2)+2]}_{4} + \underbrace{[(2\cdot 2)+0]}_{4} + \underbrace{[(3\cdot 2)+1]}_{7}$

6) $\forall k \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow \det(kA) = k^n \det(A)$

Es: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \Rightarrow \det(A) = 2$

$\det(kA) = 2^3 \cdot 2 = 16$

$K = 2$

7) SIA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ TRIANGOLARE O DIAGONALE : il DET è UGUALE al PRODOTTO degli ELEMENTI della DIAGONALE PRINCIPALE

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \det(A) = 10$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det(B) = 0$

OSS: $\det(I) = 1 \quad \forall I \in \mathbb{R}^{n \times m}$

DEF: una MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha la CARATTERISTICA p se esiste una sottomatrice quadrata di ordine p ($p \times p$) il cui det è $\neq 0$ e tutte le sottomatrici di dimensione $>$ di p hanno det $= 0$ (nullo)

OSS: la def sopra vale anche x matrici rettangolari

Es: $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, caratteristica di $A = 2 \Rightarrow \det(A) = 0$

$\downarrow$

A è + grande di 2 quindi è 0

DEF: è la dim della sottomatrice quadrata + grande con det $\neq 0$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ calcolo caratteristica $\to$ car(A)

$\to$ dim 3 xchè + grande

$A_{(-;4)} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M_{-;4}(A_{(-;4)}) = \det(A_{(-;4)}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 2(-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$

$-2(-4+12) - 5(-4+12) =$
$-2 \cdot 8 - 5 \cdot 8 = -56 \to \neq 0$

$\downarrow$

det $\neq 0$

quindi car(A) $= 3$

OSS: $\text{car}(A \in \mathbb{R}^{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$

ES: $A \in \mathbb{R}^{5 \times 2} \to \text{car}(A) \leq 2$

DEF! data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. il RANGO di A è il n° di RIGHE o COLONNE LINEARMENTE DIPENDENTI → rank(A) o r

OSS! il RANGO di A è $\leq \min(m;n)$

OSS: il RANGO di A coincide con la car(A)

↳ si hanno 2 modi x calcolarlo
- calcolo la caratteristica
- calcolo le righe o colonne linearmente dipendenti

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ → rango massimo 2
→ le 2 righe sono indipendenti

rank(A) = 2 → xchè ci sono 2 righe indipendenti

Es: verificare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ abbia rango massimo e sia uguale a 3

↓

rango max = 3

1) DIFFICILE DIRE SE SONO LIN. DIPENDENTI QUINDI CALCOLO IL DET

$$\det(A) = 1(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(0+2) + 2(1-4) = -2-6 = -8 \neq 0$$ → quindi rank(A)=3

OSS: una matrice quadrata che ha rango massimo ha sicuramente det ≠ 0

↓ quindi una matrice quadrata con det ≠ 0 ha rango massimo

QUIZ: $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$, rank(A) = 3

det(A) = 0 ? → NO SOLO MAT. QUADRATE IL DET

INVERSIONE DI MATRICE

DEF: una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice INVERTIBILE se esiste una matrice quadrata $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale x cui $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
dove $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quindi $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

A^{-1} è definita inversa della matrice A.

Una matrice quadrata $A^{n \times n}$ è invertibile se e solo se ha det ≠ 0 ovvero è NON SINGOLARE

DEF: data $A^{n\times n}$ definiamo la **MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI** C:

$$C = \begin{pmatrix} A_{1;1} & \dots & A_{1;n} \\ \vdots & & \\ A_{n;1} & \dots & A_{n;n} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{i;j} = (-1)^{i+j} \det(A_{(i;j)})$$

quindi
$$C^T = \begin{pmatrix} A_{1;1} & \dots & A_{n;1} \\ \vdots & & \\ A_{1;n} & \dots & A_{n;n} \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice A^{-1} si calcola con $A^{-1} = \dfrac{C^T}{\det(A)}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow$ CALCOLO A^{-1}

1) $\det(A) = (3\cdot 1) - (2\cdot 1) = 1 \neq 0 \longrightarrow$ esiste A^{-1}

2) $C = \begin{pmatrix} A_{1;1} & A_{1;2} \\ A_{2;1} & A_{2;2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$A_{1;1} = (-1)^2 \cdot 1 = 1$
$A_{1;2} = (-1)^3 \cdot 2 = -2$
$A_{2;1} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$
$A_{2;2} = (-1)^4 \cdot 3 = 3$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ VERIFICO molt. $\times A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-1 \\ -6+6 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ OK}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) CALCOLO SE ESISTE L'INVERSA

$\det(A) = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3+2) - 2(4-3) = 3 \longrightarrow$ quindi $\operatorname{rank}(A) = 3$

2) CALCOLO C

$$C = \begin{pmatrix} A_{1;1} & A_{1;2} & A_{1;3} \\ A_{2;1} & A_{2;2} & A_{2;3} \\ A_{3;1} & A_{3;2} & A_{3;3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_{1;1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(3+2) = 5$

$A_{1;2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(2+1) = -3 \qquad A_{2;3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-0) = -1$

$A_{1;3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-3) = 1 \qquad A_{3;1} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(0+6) = 6$

$A_{2;1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(0+4) = -4 \qquad A_{3;2} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1+4) = -3$

$A_{2,2} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+2) = 3 \qquad A_{3;3} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3-0) = 3$

$$A^{-1} = \frac{C^T}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oss! Si può invertire anche la trasposta xchè il det è sempre uguale

RIPASSO

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $tr(A)$ = somma elementi diagonale principale

  $tr(A) = 1+5+9 = 15$ → solo x matrici quadrate

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $tr(A) = 0$

  $\det(A) = 0 \iff$ non esiste A^{-1}

  $rank(A) = 1$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ determinare x tale per cui A non è invertibile

  ↓ $x = 0$ → det nullo

- $A = \begin{pmatrix} \boxed{-1 \;\; 0 \;\; -1} \\ 2 \;\; 1 \;\; -1 \\ 0 \;\; 1 \;\; x \end{pmatrix}$ $\det(A) = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(x+1) -1(2-0) =$

  $-x-1-2 = -x-3$

  → $-x-3 = 0 \quad x = -3 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -4$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 3/4 \\ -1/2 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$A_{1;1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{2;1} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{3;1} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{1;2} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$ $\quad A_{2;2} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{3;2} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$A_{1;3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{2;3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{3;3} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

ES. CALCOLO DETERMINANTE:

1) $A = 3 \quad \det(A) = a_{1,1} = 3$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(b) = b_{1,1} \cdot b_{2,2} - b_{1,2} \cdot b_{2,1} = 1 \cdot 3 - 2(-2) = 3 + 4 = 7$

3) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(c) =$ NON è possibile, solo × matrici quadrate

4) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(D) = \sum_{j=1}^{n} a_{i;n} A_{i;n} =$

$= a_{1;1} A_{1;1} + a_{1;2} A_{1;2} + a_{1;3} A_{1;3} =$

$= \cancel{0 A_{1;1}} + 1 A_{1;2} + 2 A_{1;3} =$

$= 1 (-1)^3 \det(A_{1;2}) + 2(-1)^4 \det(A_{1;3}) =$

$= -1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -1(-3+1) + 2(-3-0) =$

$= 2 - 6 = -4$

5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 8 & -12 \\ 6 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(E) = \sum_{i=1}^{n} a_{n;2} A_{n;2} =$$

$$= a_{1;2}A_{1;2} + a_{2;2}A_{2;2} + a_{3;2}A_{3;2} + a_{4;2}A_{4;2} =$$

$$= 0\cancel{A_{1;2}} + 0\cancel{A_{2;2}} + \cancel{0A_{3;2}} + \cancel{0A_{4;2}} = 0$$

seconda colonna nulla $\rightarrow$ det $= 0$

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{n;2} A_{n;2} =$$

$$= a_{1;2}A_{1;2} + a_{2,2}A_{2,2} + a_{3;2}A_{3;2} + a_{4;2}A_{4;2} =$$

$$= 1\,A_{1;2} + \cancel{0A_{2;2}} + \cancel{0A_{3;2}} + 1\,A_{4;2} =$$

$$= 1(-1)^3 \det(A_{(1;2)}) + 1(-1)^6 \det(A_{(4;2)}) =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1-(-2)) - 3(1-4) =$$
$$= 2 + 9 = 11$$

$$1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + -1(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(2-3) - 1(-1+6) =$$
$$= 1 - 5 = -4$$

$$= -1(-4) + 1 \cdot 11 = 15$$

Es. CALCOLO RANGO:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 17 \\ 7 & -5 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

rank$(A) = ?$
$\downarrow$
rank$(A) = 3$? $\rightarrow$ calcolo

- CALCOLO ATTRAVERSO IL DET

$$\det(A_1) = 3(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -3(-5+7) = -6 \neq 0 \rightarrow \text{rango } 3$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ rank (A) = 4 ? → NO

↓

calcolo

$\det(A) = 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$ → rank(A) non può essere 4

↓

$1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1+1) = 0$

rank (A) = 3? → calcolo: $\det(A_1) = 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1) = -1 \neq 0$ → rank(A) = 3

---

3) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ k & -1 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}$ rank (A) ≤ 3 → calcolo

$\det(A) = 4(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + k(-1)^5 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^6 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ k & -1 \end{vmatrix} =$

$= 4(-2-1) - k(-2+k) + 2(2+2k) =$

$= -8 \cancel{-4} + 2k - k^2 \cancel{+4} + 4k = -k^2 + 6k - 8$

$-k^2 + 6k - 8 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot (-1)(-8) = 36 - 32 = 4$

$k_{1,2} = \frac{-6 \pm 2}{-2}$ ↗ $+2$ ↘ $+4$ → per $k \neq 2$ e 4 il det (A) ≠ 0 quindi rank(A) = 3

↓ verifico

$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A_2) = 2(-1)^4(-2) = -4 \neq 0$ può essere 2

$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A_3) = 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

$= -3(-4+3) - 1(-2+4) - 1(-6+8) =$

$= 3 - 2 - 2 = -1 \neq 0$ quindi rank(A) = 3

Es. CALCOLO MATRICE INVERSA:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} A_{1;1} & A_{1;2} \\ A_{2;1} & A_{2;2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ → $A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{1;1} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$

$A_{1;2} = (-1)^3(-1) = 1$

$A_{2;1} = (-1)^3(-1) = 1$

$A_{2;2} = (-1)^4(1) = 1$

$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1(-1)^2 2 + (-1)(-1)^3(-1) = 1$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} A_{1;1} & A_{1;2} & A_{1;3} \\ A_{2;1} & A_{2;2} & A_{2;3} \\ A_{3;1} & A_{3;2} & A_{3;3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{1;1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{2;1} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(-7-0) = 7$$

$$A_{1;2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(7-4) = -3 \qquad A_{2;2} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7-6 = 1$$

$$A_{1;3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{2;3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(+2) = -2$$

$$A_{3;1} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-3 = -5$$

$$A_{3;2} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2-3) = 1$$

$$A_{3;3} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 7/4 & 7/4 & -5/4 \\ -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 1 = 4 \neq 0 \quad \text{ok}$$

ESERCITAZIONE

2-10-2024

OPERAZIONI FRA MATRICI:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

calcolo $\rightarrow$ $3B + 2(2A - C) + (A + B + 2C) =$

$$3B + 4A \cancel{-2C} + A + B \cancel{+2C} = 5A + 4B =$$

$$5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2) TROVARE X tale che $4(A+B+X)+4(X-A-B)-4(A-B+X) = O_2$ (matrice nulla 2×2)

$$4(\cancel{A}+\cancel{B}+\cancel{X}+X\cancel{-A}\cancel{-B}-A\cancel{+B}\cancel{-X}) = O_2$$

$$\cancel{4}(X-A+B) = O_2$$

$$X = O_2 + A - B \rightarrow X = A - B$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3) CALCOLARE se possibile i seguenti prodotti:

- $\underset{1\times4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{4\times1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}} = (1\cdot4 + 2\cdot3 + 0\cdot(-3) + (-1)\cdot6) = 4+6-6 = 4$

- $\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}} \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1(-1)+(2\cdot2) & 1(-3)+2\cdot0 \\ 3(-1)+5\cdot2 & 3(-3)+5\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$

  ottengo 2×2

- $\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$ NON POSSO FARE

- $\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 & 5+0 \\ 2+0 & 6+4 & 10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 10 & 18 \end{pmatrix}$

  OTTENGO 2×3

- $\underset{3\times3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{\text{sol}}{\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}}$

• $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

verificare che $A(B \cdot C) = (AB)C \neq C(AB)$

$$BC = \begin{pmatrix} 0+2 & 0+1 \\ -2+0 & +6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-4 & -1+12 \\ 6-8 & 3+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-4 & -1+0 \\ 0-8 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$$

$$C(AB) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & \\ & \end{pmatrix}$$ → DIVERSA DA $(AB)C$

• verifica che $A(B+C) = AB + AC$ (A CASA)

• $A^2 - B^2$ e $(A-B)(A+B)$ (A CASA)

4) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$

che dim. deve avere $B \in \mathbb{R}^{? \times ?}$ per fare $A \cdot B \cdot C$

$(m \times n)$ $(n \times p)$ $(p \times q)$

↓

ottengo matrice $m \times q$

5) $A = (2 \; ; -1)$ $B = \begin{pmatrix} \beta & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ trovare β tale che $A \cdot B \cdot C = 0$

$$ABC = (2 \; -1)\begin{pmatrix} \beta & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$(2\beta - 1 \quad 4-4)\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\beta - 1 = 0$$

$2\beta - 1 = 0$ $\cancel{2}\beta = \frac{1}{2}$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ trovare $X \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ tale che $AX = B$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2y \end{pmatrix}$ → $AX = B$ → $\begin{pmatrix} x+2y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

7) $k \in \mathbb{R}$ tale che $A^2 = A$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \end{pmatrix}$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0 \\ 2+2k & k^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+2k & k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{cases} 2+2k = 2 \\ k^2 = k \end{cases} \quad \begin{cases} 2+2k=2 \\ k^2-k=0 \end{cases} \quad k(k-1) \quad k=0 \quad \begin{cases} k=0 \\ 0^2=0 \end{cases} \rightarrow k=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ trovare x tale che $AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} -1+0 & x+8 \\ 0+0 & 0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x+8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1+0 & -2+3x \\ 0+0 & 0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2+3x \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $x+8 = -2+3x$

$x - 3x = -2-8$

$\cancel{2}x = \frac{-10}{-2} \quad x = 5$

- Es. su rango e determinante

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow M_{1;1} \quad M_{2;3} \quad M_{3;3} \quad M_{4;2}$

$$M_{1;1} = \det(A_{(1;1)}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$M_{2;3} = \det(A_{(2;3)}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$M_{3;3} = \det(A_{(3;3)}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$M_{4;2} = \det(A_{(4;2)}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = (1\cdot 4) - (2\cdot 3) = -2$ NON SINGOLARE $\to \det \neq 0$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(B) = (1\cdot 1) - (-1\cdot -1) = 0$ SINGOLARE $\to \det = 0$

$0 < \text{rank}(B) < 2 \to 1$

- $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(C) = 0 \to$ pk 1^a riga è 2 volte la 2^a
  SINGOLARE
  $\text{rank}(C) = 1$

- $D = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$\det(D) = -a - a = -2a$
- $a = 0$ singolare $\to$ rank $= 1$
- $a \neq 0$ non singolare $\to$ rank $= 2$

11) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (9-8) + (2-1) = 2$ NON SING. rank $= 3$

- $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(B) = 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(2) + (4-2) = -2+2 = 0$

SINGOLARE
RANK < 3

$M_{1;1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ $\quad$ rank ≥ 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(C) = -1^{s}\det(A)$ $\quad s = 1$

ho scambiato 1 riga

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(E) = (-1)^1 \det(B) = 0$

12) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$1(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} =$

$= -1(-4+6) - (-30+4) =$
$-2 + 26 = 24$

$1(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} =$

$= -(6+0) - (-24-6) =$
$-6 + 30 =$

$24 + 24 = 48$
↳ non singolare rank = 4

13) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ se possibile A^{-1}

A^{-1} possibile se $\det(A) \neq 0$

$\det(A) = 3 - 2 = 1 \neq 0$ ok

$A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{1}$

• $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(B) = 2 \neq 0$

• $E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\quad \det(E) = abc$
$a, b, c \neq 0$

$E^{-1} = \dfrac{1}{\det(E)} \begin{pmatrix} E_{1,1} & \dots & \\ \vdots & & \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad C_E = \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix} = C_E^T$

$$E_{1;1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = bc$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

$$E_{1;2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$E_{1;3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

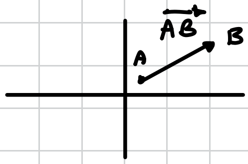
VETTORI

7-10-2024

DEF: Un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ ($= \underrightarrow{AB} = \underset{\sim}{AB}$) è un segmento di estremi A e B orientato nel verso che va da A a B.

DEF: un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ è una coppia ordinata di punti A e B dove:

- A è il punto di applicazione
- B punto finale



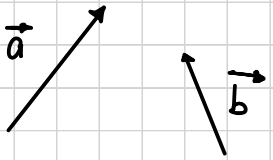
ogni vettore è caratterizzato da:

1) DIREZIONE della retta passante × A e B
2) VERSO stabilisce il punto di applicazione e quello finale
3) MODULO O NORMA che indica la lunghezza

NOTAZIONE: la norma è identificata con $|\overrightarrow{AB}| \in \mathbb{R}^{\circ}_{+}$

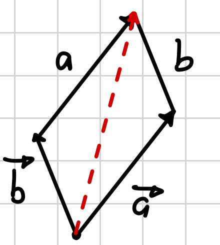
DEF: un vettore di modulo 1 è detto VETTORE UNITARIO O VERSORE

1) SOMMA:

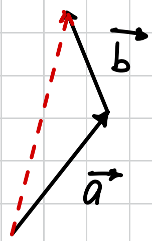


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

1a) PARALLELOGRAMMA



1b) PUNTA CODA



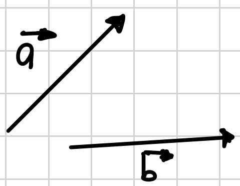
PROPRIETÀ SOMMA:

1) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $\to |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
l'uguaglianza vale se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno medesima direzione

2) ASSOCIATIVA $\to$ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

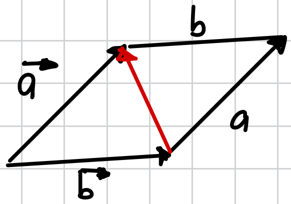
3) COMMUTATIVA $\to$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) DIFFERENZA



PROPRIETÀ:

- ASSOCIATIVA
- COMMUTATIVA
- $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \to$ vettore nullo

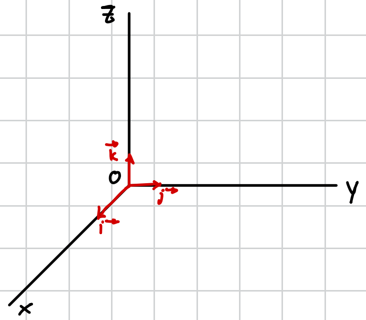


3) PRODOTTO TRA VETTORE e SCALARE (k)

dato $\vec{a}$ il vettore $\vec{c} = k\vec{a}$ ho le seguenti caratteristiche:

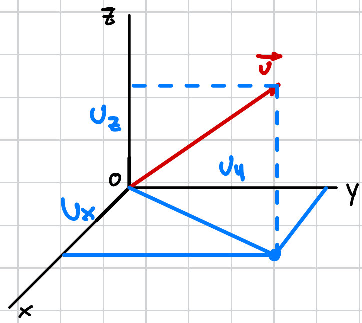
- medesima direzione di $\vec{a}$
- se $k>0$ verso uguale ad $\vec{a}$
- se $k<0$ verso opposto ad $\vec{a}$
- modulo uguale a $|\vec{a}| \cdot |k|$ con $|k|$ valore assoluto

COMPONENTI CARTESIANE:



i, j, k sono i versori degli assi cartesiani
↓
è detta TERNA ORTOGONALE

DEF: un qualunque vettore $\vec{v}$ si può scrivere in modo univoco in questo modo: $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$
dove v_x, v_y, v_z sono dette COMPONENTI CARTESIANE DEL VETTORE $\vec{v}$.



In particolare: v_x è la lunghezza delle P.O. di $\vec{v}$ sull'asse x.
v_y " " " " " " " y.
v_z " " " " " " " z.

v_x, v_y, v_z sono anche le coordinate cartesiane del punto finale di $\vec{v}$ assumendo che il suo punto di applicazione è l'origine

NOTAZIONE: $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = (v_x; v_y; v_z) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

Operazioni con componenti cartesiane:

1) somma: $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$
$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}\ V_z\vec{k}$

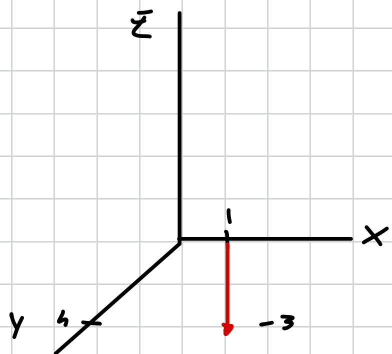
$$\vec{v} \pm \vec{V} = (v_x \pm V_x,\ v_y \pm V_y,\ v_z \pm V_z)$$

2) prodotto x scalare: $a \cdot \vec{v} = (av_x,\ av_y;\ av_z)$

3) modulo: $|\vec{u}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Es: siano dati: $\vec{v}(4; 1; -3)$ $\vec{V}(1; -2; 6)$

- disegnare $\vec{v}$
- calcolare $\vec{v}+\vec{V}$; $\vec{v}-\vec{V}$; $3\cdot\vec{v}$; $|\vec{v}|$



$\vec{u}+\vec{v} = (5;-1;3)$ 9-10-2024

$\underline{u}-\underline{v} = (3;3;-9)$

$3\underline{u} = (13;3;-9)$

$|\underline{u}| = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$

DEF: dato un qualunque $\underline{u}$ si identifica con $\tau_{\underline{u}}$ IL SUO VERSORE ha stessa DIREZIONE e VERSO ma MODULO UNITARIO.

Dato $\underline{u}$ il suo VERSORE si calcola dividendo le componenti cartesiane di $\underline{u}$ per $|\underline{u}|$:

$$\tau_{\underline{u}} = \left(\frac{u_x}{|\underline{u}|};\frac{u_y}{|\underline{u}|};\frac{u_z}{|\underline{u}|}\right) = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

Es: $\underline{u} = (4,1,-3)$

$|\underline{u}| = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$

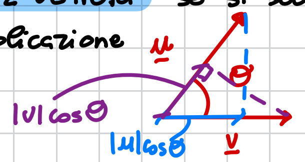
$\tau_{\underline{u}} = \left(\frac{4}{\sqrt{26}},\frac{1}{\sqrt{26}},-\frac{3}{\sqrt{26}}\right)$ verifico: $|\tau_{\underline{u}}| = \sqrt{\frac{16}{26}+\frac{1}{26}+\frac{9}{26}} = \sqrt{\frac{26}{26}} = 1$

1) PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI:

$\underline{u},\underline{v} \to$ numero $\in \mathbb{R}$

DEF: siano $\underline{u}$ e $\underline{v}$ due vettori:

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta,$$
θ è L'ANGOLO TRA I 2 VETTORI se si sovrappone il loro punto di applicazione



oss: $|\underline{u}|\cos\theta$ è la lunghezza della proiezione di $\underline{u}$ su $\underline{v}$

$|\underline{v}|\cos\theta$ è " " " " $\underline{v}$ su $\underline{u}$

se $\cos\theta = 0$ il prodotto scalare fra vettori è nullo $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)$

PROPRIETÀ:

1) $\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{u}$ COMMUTATIVA
2) $\lambda,\mu \in \mathbb{R} \to (\lambda\underline{u}+\mu\lambda)\cdot\underline{w} = \lambda\underline{u}\,\underline{w}+\mu\underline{v}\,\underline{w}$ LINEARITÀ
3) $|\underline{u}\cdot\underline{v}| \le |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|$ DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

↳ DIM: $|\underline{u}\cdot\underline{v}| = \big||\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos\theta\big| = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\,|\cos\theta|$
$\le |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot 1 = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|$

4) $\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos\theta$

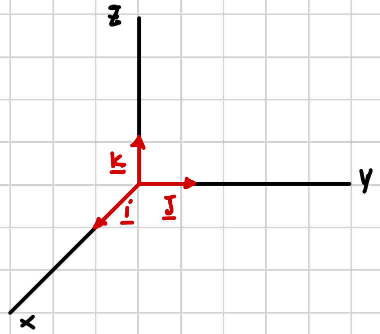
↳ $\cos\theta > 0 \to \underline{u}\cdot\underline{v}\cdot\cos 0 \to \theta$ ACUTO

↳ $\cos\theta = 0 \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v} = 0 \rightarrow \theta$ RETTO

↳ $\cos\theta < 0 \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v} < 0 \rightarrow \theta$ OTTUSO

5) $|\underline{u}|\cdot|\underline{u}| = |\underline{u}|\cdot|\underline{u}|\underbrace{\cos\theta}_{1} = |\underline{u}|^2 \rightarrow |\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}$

CALCOLO IL PRODOTTO SCALARE IN COMPONENTI CARTESIANE:



$\underline{i}\cdot\underline{i} = |\underline{i}|\cdot|\underline{i}|\cos\theta = 1\cdot1\cdot1 = 1$

$\underline{j}\cdot\underline{j} = 1 \qquad \underline{k}\cdot\underline{k} = 1$

$\underline{i}\cdot\underline{j} = i\cdot j\cdot\underbrace{\cos 90°}_{0} = 0 = i\cdot k$

siano $\underline{u} = (\underline{u}_x, \underline{u}_y, \underline{u}_z) = \underline{u}_x i + \underline{u}_y j + \underline{u}_z k$

$\underline{v} = (\underline{v}_x, \underline{v}_y, \underline{v}_z) = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k} =$

$\underline{u}\cdot\underline{v} = (\underline{u}_x \underline{i} + u_y \underline{j} + \underline{u}_z \underline{k})\cdot(v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}) = \underline{u}_x i \cdot v_x i + u_y j\, v_y j + u_z \underline{k}\, v_z \underline{k} =$

$= (u_x v_x)\underbrace{(\underline{i}\cdot\underline{i})}_{1} + (u_y v_y)\underbrace{(\underline{j}\cdot\underline{j})}_{1} + (u_z v_z)\underbrace{(\underline{k}\cdot\underline{k})}_{1} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

$\rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v} = (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)$ applichiamo

Es: $\underline{u} = (1, -4, 3)$; $v = (2, 5, -2)$

- $\underline{u}\cdot\underline{v} = (1\cdot2) + (-4\cdot5) + (3(-2)) = 2-20-6 = -24$
- trova coseno angolo tra vettori

  $\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|}$

  $|\underline{u}| = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26} \qquad |\underline{v}| = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$

  $\cos\theta = -\dfrac{24}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{33}} \rightarrow \theta$ è ottuso xchè $\underline{u}\cdot\underline{v} < 0$

Es: $\underline{u} = (1, 2, -3) \qquad v = (-2, 2, x)$

trovare se esiste il valore di x tale per cui $\underline{u} \perp \underline{v}$

$\rightarrow$ se $\underline{u} \perp \underline{v} \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v} = 0$

$\underline{u}\cdot\underline{v} = (1(-2)) + (2\cdot2) + (-3x) = -2+4-3x = 2-3x = 0 \qquad x = \frac{2}{3}$

Es: $\underline{u} = (1, 2, x) \quad v = (2, 1, x)$

- trovare x tale per cui $\underline{u} \perp \underline{v}$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (1 \cdot 2) + (2 \cdot 1) + (x \cdot x) = 4 + x^2 \longrightarrow \forall x$$ l'angolo sarà sempre acuto

Es: $\underline{u} = (1, x, 2) \quad v = (4, 2, -1)$

- trovare x e y per cui $\underline{u} \perp \underline{v}$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (1 \cdot 4) + (x \cdot 2) + (2(-1))$$
$$4 + 2x - 2 = 0$$

assumento che $|\underline{u}| = 2 = \sqrt{1 + x^2 + 4} = \sqrt{x^2 + 5}$

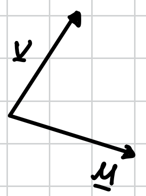
$$\begin{cases} 4 + 2x - 2 = 0 \\ \sqrt{x^2+5} = 2 \end{cases} \quad x^2 + 5 = 4 \quad x^2 = -1$$ NON è possibile
non esistono x e y

2) PRODOTTO VETTORIALE:

$\underline{u}, \underline{v} \longrightarrow \underline{w}$

DEF: dati 2 vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ i prodotti vettoriale $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{u} \wedge \underline{v}$ è un vettore $\underline{w}$ tale che:

- ha MODULO UGUALE a $|\underline{u}|\,|\underline{v}| \operatorname{sen}\theta$, con θ, angolo compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$ se si sovrappongono i punti di applicazione
- ha DIREZIONE ORTOGONALE al piano creato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$
- ha VERSO STABILITO dalla regola della vite o delle mano destra.



$\underline{u} \times \underline{v}$

PROPRIETÀ: 1) $\underline{u} \times \underline{v} = 0 \longrightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \longrightarrow \operatorname{sen} 0°$ o $\pi \longrightarrow \underline{u}$ e $\underline{v}$ hanno direzione uguale

2) $|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \operatorname{sen}\theta$
area parallel.
che ha $\underline{u}$ e $\underline{v}$ come lati

3) $\underline{u} \times \underline{v} \neq \underline{v} \times \underline{u}$ ANTICOMMUTATIVA

In componenti cartesiane: $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{J} \times \underline{J} = \underline{k} \times \underline{k} = 0$

$\underline{i} \times \underline{J} = \underline{k} \longrightarrow \underline{J} \times \underline{i} = -\underline{k}$

$\underline{J} \times \underline{k} = \underline{i} \longrightarrow \underline{k} \times \underline{J} = -\underline{i}$

$\underline{i} \times \underline{k} = -\underline{J} \longrightarrow \underline{k} \times \underline{i} = \underline{J}$

$\rightarrow \underline{w} = \underline{u} \times \underline{v} = \det\left(\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}\right) = (u_y v_z - v_y u_z)\,\underline{i} - (u_x v_z - u_z v_x)\,\underline{j} + (u_x v_y - v_x u_y)\,\underline{k}$

$\rightarrow \underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$

Es: $u = (1, 2, 0) \quad v = (-1, 3, 2)$

$u \times v = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{i}(2\cdot 2 - 0\cdot 3) - \underline{j}(1\cdot 2 - 0(-1)) + \underline{k}(3\cdot 1 - 2(-1)) = \underline{i}(4-0) - \underline{j}(2-0) + k(3+2) = 4i - 2j + 5k = (4; -2; 5)$

$|\underline{u} \times \underline{v}| = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45}$

Es: $\underline{u} = (1, 2, q) \quad v = (1, 2, -3)$

- trovare il valore di q tale che $\underline{u} \parallel \underline{v} \rightarrow \underline{u} \times \underline{v} = 0$

$\det\left(\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & q \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}\right) \rightarrow$ quando $q = -3$

è una Q

$\underline{w} = \underline{i}(-6-2q) - \underline{j}(-3-q) + k(2-2) = (-6-2q)\underline{i} + (3+q)\underline{j} + 0\underline{k}$

$\hookrightarrow \begin{cases} 6 - 2q = 0 \\ 3 + q = 0 \end{cases} \rightarrow q = -3$

3) PRODOTTO MISTO o TRIPLO

DEF: dati 3 vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ il prodotto misto $c = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) \rightarrow$ scalare in particolare c in valore assoluto è l'area del parallelepipedo che ha come lati $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

OSS: $c = 0 \rightarrow$ quando i 3 vettori sono complanari o hanno medesima direzione

OSS: $\underline{u}(\underline{v} \cdot \underline{w}) = -\underline{u}(\underline{w} \times \underline{v})$ ANTI COMMUTATIVA

In comp. cartesiane: $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\underline{V} = (v_x, v_y, v_z)$, $\underline{w} = (w_x, w_y, w_z)$

$$c = \underline{u} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

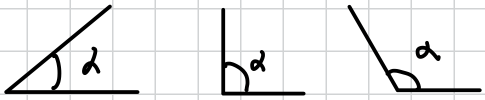
Es: $\underline{u} = (1, 2, 3) \quad v = (-2, 1, 2) \quad w(0, 1, 2)$

$c = \underline{u} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{w}) = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2+6) + 2(1+4) = -8 + 10 = +2$

RIASSUNTO:

① PRODOTTO SCALARE: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha = 1 \quad |\underline{u}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$

x trovare se 2 vettori sono $\perp$ faccio il prodotto scalare che deve essere $= 0$



$\underline{u} \cdot \underline{v} > 0 \qquad \underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \qquad \underline{u} \cdot \underline{v} < 0$

② PRODOTTO VETTORIALE: $\underline{u} \times \underline{v} = 0 \longleftrightarrow \underline{u} \parallel \underline{v}$ calcolo det di $\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$

③ PRODOTTO MISTO: $\underline{u}(\underline{v} \cdot \underline{w}) = 0 \longleftrightarrow \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ COMPLANARI

$$c = \underline{u}(\underline{v} \cdot \underline{w}) = \det \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Es: $\underline{v} = 3\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$ ① se α è acuto, ottuso, retto

$\underline{u} = \underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ ② trova un vettore $\perp$ a $\underline{v}$ e $\underline{w}$

① $\underline{v} \cdot \underline{u} = (3 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (-1 \cdot -1) = 3 + 2 + 1 = 6 > 0$ acuto

② $\det \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \underline{i}\,(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \underline{j}\,(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \underline{k}\,(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$\underline{i}(-1+2) - \underline{j}(-3+1) + \underline{k}(6-1) =$
$-\underline{i} + 2\underline{i} + 3\underline{j} - \underline{j} + 6\underline{k} - \underline{k} = \underline{i} + 2\underline{j} + 5\underline{k}$

Es: $\underline{u} = (1, 2, 3) \quad \underline{v}(1, 0, -1) \quad w = (0, 1, 2)$

- verifica se sono complanari $\rightarrow$ prodotto misto $= 0 \rightarrow c = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = 0$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(0+1) - 1(4-3) = 1 - 1 = 0 \longrightarrow \text{sono complanari}$$

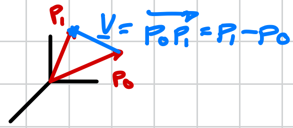
Es: $\underline{u}, \underline{v}$ siano 2 vettori nello spazio.

- Trovare dei metodi x verificare che 1 vettore w sia ortogonale sia ad $\underline{u}$ che a $\underline{v}$.

1) $\begin{cases} \underline{w} \cdot \underline{v} = 0 \\ \underline{w} \cdot \underline{u} = 0 \end{cases}$ I metodo 2) $\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$ II metodo

DEF: dati 2 punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $P_1 = (x_1; y_1, z_1)$ posso scrivere il vettore $\underline{v}$ che ha come punto di applicazione P_0 e punto finale P_1

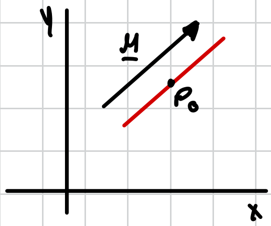
$$\underline{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0 = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$$



sia dato un vettore nel piano $\underline{u} = (\overset{u_x}{\alpha}, \overset{u_y}{\beta})$ e un punto nel piano $P_0 = (x_0, y_0)$ vogliamo trovare la retta nel piano con queste caratt:

1) è parallela a $\underline{u}$

2) passa per P_0



x trovarla definisco un generico punto nel piano $P = (x; y)$ poi definisco il vettore generico $P - P_0 = \overrightarrow{P_0P}$ questo vettore ha come componenti $(x - x_0;\ y - y_0)$ per farlo $/\!/\ u$ impongo la condizione: $P - P_0 /\!/ u \rightarrow P - P_0 = t\underline{u},\ t \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \underbrace{(x - x_0)\underline{i} + (y - y_0)\underline{j}}_{p - p_0} /\!/ \underbrace{t(\alpha\underline{i} + \beta\underline{j})}_{u} \qquad (u = (\alpha, \beta))$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - x_0 = t\alpha & \text{(componente } i) \\ y - y_0 = t\beta & \text{(componente } j),\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t,\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \text{eq. parametrica della retta nel piano}$$

Es: trovare la retta nel piano passante per $P_0(2,1)$ e parallela a $\underline{u}(1,3)$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t = 2 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ES. DA PDF

3) $\underline{u} = 2i + 3j - 6k$ $\qquad$ $v = 2i - j - 2k$

$\tau_u = \frac{u}{|u|} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right)$ $\qquad$ $\tau_v = \frac{v}{|\underline{v}|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$|u| = \sqrt{4+9+36} = 7$ $\qquad$ $|\underline{v}| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$\hat{u} = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j - \frac{6}{7}k$ $\qquad$ $\hat{v} = \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$

7) $w \longrightarrow u \cdot w = v \cdot w = 0$

$$\underline{u} \times \underline{v} = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \underline{i}(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \underline{j}(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \underline{k}(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\underline{i}(-6-6) - \underline{j}(-4+12) + \underline{k}(-2-6) =$$

$$-12\underline{i} - 8j - 8k$$

8) $u = 2i - k$ $\qquad$ $v = 2i + j + 4k$

$$\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = j(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} i & k \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-\underline{j}(8+2) - (-\underline{i} - 2\underline{k}) =$$
$$-10j + \underline{i} + 2\underline{k} = \underline{i} - 10\underline{j} + 2\underline{k}$$

9) $\underline{u} = (1, 2, -2)$ $\qquad$ $\underline{v} = (6, 2, 3)$

$\cos\theta = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|} = \frac{4}{21} > 0$ ACUTO

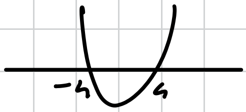
$\underline{u} \cdot \underline{v} = 6 + 4 - 6 = 4$

$|u| = \sqrt{1+4+4} = 3$ $\qquad$ $|v| = \sqrt{36+4+9} = 7$

13) $u = (x, 2, -3)$ $\qquad$ $v = (x, -5, 2)$

$\cos\theta = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = x^2 - 10 - 6 = x^2 - 16$ $\qquad$ $x = \pm 4 \longrightarrow$ RETTO



$x < -4 \cup x > 4 \longrightarrow$ ACUTO

$-4 < x < 4 \longrightarrow$ OTTUSO

16) $u = (1, 1, c) \quad v = (2, c, -2)$

a) $u \cdot v = 0 \longrightarrow \perp$

$u \cdot v = 2 + c - 2c = 0$

$+c = +2 \qquad c = 2 \longrightarrow$ se $c = 2$ sono $\perp$

b)

$A = 2|\underline{u} \times \underline{v}| =$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + j(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + k(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\underline{i}(-2-2) - j(-2-2) + \cancel{k(2-2)} =$$

$$-4\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$2|\underline{u} \times \underline{v}| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 2\sqrt{32}$$

17) b) $u(2, -1, 3) \quad v = (4, -2, c)$

$$\begin{cases} 2 = 4\lambda & \lambda = 1/2 \\ -1 = -2\lambda & \lambda = 1/2 \\ 3 = c\lambda & \lambda = 3/c \qquad c = 6 \end{cases}$$

c) $|u \times v| = 1$

ESERCITAZIONE VETTORI

1) $\underline{u} = (1, 2, -2) \quad \underline{v} = (6, 2, 3)$

a) determina modulo e versori associati

$$|\underline{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$$

moduli

$$\hat{u} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \frac{(1, 2, -2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\hat{v} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{(6, 2, 3)}{7} = \left(\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

b) determina se sono $\parallel$ o $\perp$

$\underline{u} \perp \underline{v}$ se $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

$$(1, 2, -2) \cdot (6, 2, 3) = 6 + 4 - 6 = 4 \neq 0 \quad \text{NO } \perp$$

$\underline{u} \parallel \underline{v}$ se $\cdot \ \exists \lambda \neq 0$

$$\underline{u} = \lambda \underline{v}$$

$$(1, 2, -2) \neq \lambda(6, 2, 3) = (6\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$$

$$\begin{cases} 1 = 6\lambda & \lambda = 1/6 \\ 2 = 2\lambda & \lambda = 1 \\ -2 = 3\lambda \end{cases} \longrightarrow \text{ho 2 } \lambda \text{ diversi quindi non sono } \parallel$$

- $\underline{u} \parallel \underline{v} \quad \text{rank}\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{rank } 2 \quad \text{NO } \parallel$$

- $|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \operatorname{sen}\theta = 0$

c) determinare angolo formato dai 2 vettori e sapere se è acuto, ottuso ecc...

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|} \begin{cases} > 0 & \text{ACUTO} \\ < 0 & \text{OTTUSO} \\ = 0 & \text{RETTO} \end{cases}$$

$\underline{u} = (1, 2, -2) \quad \underline{v} = (6, 2, 3)$

$$\frac{4}{21} > 0 \quad \text{ACUTO}$$

d) determinare se $\underline{w} \parallel \underline{u}$ con modulo 6 $\underline{u} = (1, 2, -2)$

$\underline{w} = \lambda \underline{u} \quad \lambda \neq 0$

$|\underline{w}| = 6 \longrightarrow |\underline{w}| = |\lambda \underline{u}| = |\lambda|\, |\underline{u}| = 6$

$|\lambda| = \dfrac{6}{|\underline{u}|} \qquad \underline{w} = (1\lambda; 2\lambda, -2\lambda)$

$|\lambda| = 2$

$\underline{w} = \pm \cancel{6} \dfrac{(1,2,-2)}{\cancel{3}} = \pm (2, 4, -4)$

e) determina $\underline{z} \perp$ a $\underline{u}$ e $\underline{v}$

$$\begin{cases} \underline{z} \cdot \underline{v} = 0 \\ \underline{z} \cdot \underline{u} = 0 \end{cases}$$

$\underline{u} \times \underline{v}$ ottengo un vettore che voglio $\longrightarrow \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{i}\,(6+4) - \underline{j}\,(3+12) + \underline{k}\,(2-12) =$

$10\underline{i} - 15\underline{j} - 10\underline{k}$

f) calcolo area triangolo di lati $\underline{u}, \underline{v}$

$|\underline{u} \times \underline{v}| =$ AREA PARALL.

$\dfrac{1}{2} |\underline{u} \times \underline{v}| = \sqrt{2\underline{i}^2 + (-3\underline{j})^2 + (-2\underline{k})^2} = \dfrac{5}{2}\sqrt{17}$

2) $\underline{u} = (1, 0, 1) \quad \underline{v} = (2, 1, -1) \quad \underline{w} = (-1, 2, x) \quad x \in \mathbb{R}$

a) determina x tale che $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ siano complanari

$\underline{w}\,(\underline{u} \times \underline{v}) = 0 \longrightarrow$ trovo volume parallelepipedo

$(-1, 2, x) \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x + 7 = 0$

$x = -7$

- quanto è x se il valore è $= 1$

$x + 7 = 1$

$x = -6$

- volume tetraedo

b) $\dfrac{1}{6} |\underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})| = 1$

$\dfrac{|x+7|}{6} = 1 \qquad |x+7| = 6$

$x + 7 = 6$

$x = -1$

3) $A=(1,2,0)$ $\quad B=(0,1,0)$ $\quad C=(x,3,0)$

x tale che A, B, C sono allineati

$AB \parallel AC$

$\overline{AB} = B-A = (0-1)+(1-2)+(2-0) = (-1;-1;0)$

$\overline{AC} = (x-1, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ x-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ x-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{AB} \parallel \overline{AC}$ se rank $=1$
$x=2$

4) $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$? $\quad \underline{u} \perp \underline{v}$

$|\underline{u}| = 4 \quad |\underline{v}| = 2 \quad |\underline{u}-\underline{v}| = 2\sqrt{3}$

$$|\underline{u}-\underline{v}|^2 = (\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{u} - \underline{v}\cdot\underline{u} - \underline{u}\cdot\underline{v} - \underline{v}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u}\cdot\underline{v} - |\underline{v}|^2 =$$

$$\downarrow$$

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}(16+4-12) = 4 \neq \text{ no } \perp$$

5) $\underline{u} = (2,1,0)$ $\quad \underline{v} = (1,0,1)$ $\quad \underline{w} = (1,1,1)$ $\quad x = (a,b,c)$

$$\begin{cases} \underline{x}\cdot\underline{u} = 1 \longrightarrow 2a+b=1 \\ \underline{x}\cdot\underline{v} = 0 \longrightarrow a+c=0 \\ \underline{x}\cdot\underline{w} = 3 \longrightarrow a+b+c=3 \end{cases}$$

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$a=1$
$b=3$
$c=1$

6) $\underline{u}, \underline{v}$ TC $(\underline{u}+\underline{v})$ e $(\underline{u}-\underline{v})$ siano $\perp$

$(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) = 0$

$\underline{u}\cdot\underline{u} + \cancel{\underline{u}\underline{v}} - \cancel{\underline{u}\underline{v}} - \underline{v}\cdot\underline{v} = 0$

$|\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2 = 0$

$|\underline{u}|^{\cancel{2}} = |\underline{v}|^{\cancel{2}}$

7) $\underline{u} = \underline{i} + 3\underline{j} - \underline{k}$ $\quad \underline{v} = \underline{i} - \underline{j}$

$\underline{u} = \underline{u}_o + \underline{u}_p$ $\quad |\underline{u}_p| = |\underline{u}|\cos\theta = |\underline{u}_p| \frac{v}{|v|} = |u|\cos\theta \frac{v}{|v|} = |u| \frac{u\cdot v}{|u||v|} \frac{v}{|v|} = \frac{u\cdot v}{|v|^2}\cdot v$

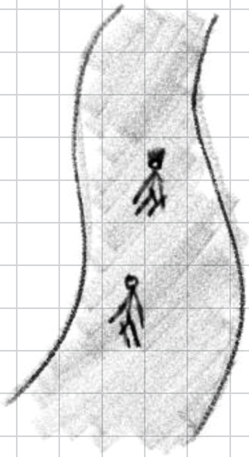
TC $\underline{u}_o \perp \underline{v}$

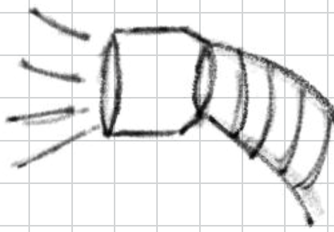
$\underline{u}_p \parallel \underline{v}$

$\underline{u} = |\underline{u}|\cdot\hat{v} = \cancel{|u|}\cdot\frac{\underline{u}}{\cancel{|u|}}$

$$\cos\theta = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|u||v|}$$

$$\underline{u}_0 = \underline{u} - \underline{u}_P = (\underline{i} + 3\underline{j} - \underline{k}) - (-\underline{i} + \underline{j}) = 2\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$$





SISTEMI LINEARI

SISTEMI LINEARI

30-09-2024

DEF: un **SISTEMA LINEARE** è dato da un gruppo di equazioni che devono essere risolte contemporaneamente. In particolare devono contenere solo funzioni lineari in 1° grado.

↳ le incognite al massimo sono moltiplicate da un coefficiente

Definiamo un sistema lineare con m equazioni e n incognite

$$\begin{cases} a_{1;1}x_1 + a_{1;2}x_2 + \dots a_{1;n}x_n = b_1 \\ a_{2;1}x_1 + a_{2;2}x_2 + \dots a_{2;n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m;1}x_1 + a_{m;2}x_2 + \dots a_{m;n}x_n = b_n \end{cases} \longrightarrow \text{posso riscrivere in matrice}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1;1} & \dots & a_{1;n} \\ \vdots & & \\ a_{m;1} & \dots & a_{m;n} \end{pmatrix}$$

detta **MATRICE CARATTERISTICA**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matrice colonna}$$

VETTORE COLONNA DELLE INCOGNITE

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matrice colonna}$$

VETTORE DEI TERMINI NOTI

$$\longrightarrow \underset{m\times n \cdot n\times 1 \,=\, m\times 1}{A \cdot X = B}$$

DEF: La **MATRICE COMPLETA (AUMENTATA)** $A^c = A|B = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ → aggiungo ad A la colonna dei termini noti

$A^c \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$

Es:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 0x_2 + x_3 = -1 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

DEF: Un sistema ha soluzioni se esistono dei valori delle incognite che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni

TEO: TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI dice: sia un sistema di m equazioni e n incognite:

1) se $rank(A) < rank(A^c) \Rightarrow$ no soluzioni

2) se $rank(A) = rank(A^c) \Rightarrow$ ci sono soluzioni

$n =$ n° incognite

↳ in questo caso — se $rank(A) = rank(A^c) = r = n \to$ solo 1 soluzione

se $rank(A) = rank(A^c) = r < n \to$ esistono ∞^{n-r} soluzioni

Es: $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 4x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{3\times 1}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}^{2\times 1}$

n

$rank(A) = 2$

$A^c = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$rank(A^c) = rank(A) \to$ esistono soluzioni

$2 < 3 \to \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

Es: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \\ x - ky = 0 \end{cases}$ studia al variare di k il n° di soluzioni

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ $\quad A^c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{2\times 1}$

$rank(A) = 2$, indipendentemente da k

$rank(A^c) \leq 3$

$det(A^c) = 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - k(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3+3) + k(3-6) = 6 + 3k - 6k = 6 - 3k$

• $k = 2 \to det(A^c) = 0$
$\to rank(A^c) = 2$
$rank(A) = rank(A^c) = 2 = n \to$ solo 1 soluzion

- $k \neq 2 \rightarrow \det(A^c) \neq 0$
  $\text{rank}(A^c) = 3$
  $\text{rank}(A) < \text{rank}(A^c) \rightarrow$ no soluzioni

I sistemi lineari si definiscono in base alla matrice caratteristica:

- A è diagonale → SISTEMA DIAGONALE
- A " TRIANGOLARE → " TRIANGOLARE
- negli altri casi il sistema è definito completo o pieno

Es: $\begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ x + 2z - w = 2 \end{cases}$ stabilire se ci sono soluzioni e quali

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\text{rank}(A) = 2$

$A^c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\text{ran}(A^c) = 2$

$\rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A^c)$
$\downarrow$
$r < n \quad n = 4$
$2 < 4 \rightarrow \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni

7-10-2024

METODI DI RISOLUZIONE

Le modalità di risoluzione dipendono dalle caratteristiche di A:

1) A è diagonale $\rightarrow A \in \mathbb{R}^{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{m,n} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{1;1}x_1 = b_1 \\ a_{2;2}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n;n}x_n = b_n \end{cases}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\downarrow$

Si dice SISTEMA DISACCOPPIATO
ovvero ogni equazione è indipendente

$\forall i : x_i = \frac{b_i}{a_{i;i}} \rightarrow x_1 = b_1/a_{1,1}$
$\vdots$
$b_n/a_{n;n}$

Es: $\begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 3x_2 = -1 \\ -x_3 = 2 \\ 2x_4 = 5 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -1/3 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = 5/2 \end{cases}$

2) A è TRIANGOLARE SUPERIORE:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ddots \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \dots a_{1,n} \\ 0 & a_{1,2} & a_{2,3} \dots a_{2,n} \\ 0 & 0 & \\ & & \ddots \\ & 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

METODI DI SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO:
- RISOLVO ULTIMA EQUAZIONE
- metto valore x_n nella penultima
- e così via fino alla prima

Es: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = 6 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x_3 = 6$

$x_2 = 7$

$x_1 = 2 + 7 - 6 = 3$

3) A è TRIANGOLARE INFERIORE

Si usa la sostituzione in avanti. Ovvero dalla prima all'ultima

Es: $\begin{cases} 2x_1 = 6 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 0$

$x_3 = 2$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) A è GENERICA:

I) A è quadrata $n \times n$ dove $n = n°$ incognite

II) A ha rango massimo $\to$ rank(A) = n $\to$ A non singolare $\to$ A è invertibile

Si definisce d_i, con $i = 1 \dots n$, il determinante della matrice $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ottenuta sostituendo l'ennesima colonna di A con il vettore termine noto.

$$D_i = \begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n,2} & a_{n,n} \end{pmatrix} \to d_i = \det(D_i)$$

La regola di CRAMER si dice che:

$$x_i = \frac{d_i}{\det(A)} = \frac{\det(D_i)}{\det(A)}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} x_1 = d_1 / \det(A) \\ x_2 = d_2 / \det(A) \\ x_3 = d_3 / \det(A) \end{cases}$$

Es: $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{2\times2} \qquad x \in \mathbb{R}^{2\times1}$

$\det(A) = -2 - 3 = -5 \neq 0$ ok!

$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to d_1 = \det(D_1) = -3$

$D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to d_2 = \det(D_2) = -4$

$x = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \qquad y = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$

$X_s = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

METODO ALTERNATIVO: riduzioni di GAUSS: L'idea alla base è di passare da un sistema complesso a uno semplice → triangolare superiore

x fare questo ad ogni passo di questo metodo azzeriamo gli elementi sotto la diagonale principale di A^c.

↳ Al passo i-esimo ($i = 1 \dots n-1$) si azzerano gli elementi sotto la diagonale della colonna i. Per fare sostituisco la riga dell'elemento che voglio azzerare con una sua combinazione lineare con la riga i-esima.
Una volta terminato risolvo il sistema con sostituzione

Es: $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x - y + 12z = 7 \\ -2x + 4y + z = 3 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 12 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A^c = [A/B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 12 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Es:

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$\boxed{i=1}$ -2 : $R_2 + 2R_1$
1 : $R_3 - R_1$

$$A_R^c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2+2 & -1+4 & -3 & 4+2 \\ 1-1 & 0-2 & 2-0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{i=2}$ -2 : $R_3 + \frac{2}{3} R_2$ $\quad A_R^c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -2+\frac{2}{3}\cdot 3 & 2-\frac{2}{3}\cdot 3 & 1+\frac{2}{3}\cdot 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) = A_R^c$

Es: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - y - 3z = 4 \\ x + 3z = -3 \end{cases}$ $\quad A^c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{i=1}$ -2 : $R_2 + 2R_1$ $\quad A_R^c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2+2 & -1+4 & -3+0 & 4+2 \\ 1-1 & 0-2 & 2-0 & -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
1 : $R_3 - R_1$

$\boxed{i=2}$ -2 : $R_3 + \frac{2}{3} R_2$ $\quad A_R^c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -2+2 & 2+\frac{2}{3}(-3) & -4+\frac{2}{3}\cdot 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y - 3z = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\text{Rank}(A) = \text{rank}(A_R^c) \rightarrow \infty^1$

Quindi: dato un sistema:

- studiare se e quante sono le soluzioni (con rouche-capelli)
- risolvo il sistema tenendo conto di tipologia matrice A:
  - DIAGONALE: RISOLVO LE EQUAZIONI NORMALMENTE
  - TRIANGOLARE: SOSTITUZIONE
  - GENERICA: GAUSS / CRAMER

ESERCITAZIONE
SISTEMI LINEARI

14-10-2024

1) a) $\begin{cases} 2x = 3 \\ 4y = 1 \end{cases} \longrightarrow Ax = B \longrightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rank}(A^c) = 2$

$\text{rank}(A) = 2 \longrightarrow \text{rank}\,A = \text{rank}\,A^c \longrightarrow$ ci sono soluzioni

$r = n \longrightarrow 1$ soluzione

RISOLVO: $A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 4 & 1/4 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}$ $x = 3/2$, $y = 1/4$

è diagonale
divido 3 per 2 ecc..

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2y = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A^c$ • $\text{rank}A = \text{rank}A^c$? Sì con 1 soluzione

rank $= 2$

$r = n \longrightarrow 1$ soluzione

RISOLVO 1: $\begin{cases} 2x = 1-2 \\ y = 2 \end{cases}$ $x = -1/2$

RISOLVO 2: con CARNOT $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ SOLUZIONE

$R_2/2$ $\quad R_1 - R_2$ $\quad R_1/2$

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + y - 1 = 0 + 1 \end{cases}$ $A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\text{rank}\,A = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 3 = -1$

$\text{rank}\,A = 2$

$\underset{2}{\text{rank}A} \le \underset{2}{\text{rank}A^c} \le \underset{2}{\min\{m, n\}}$ $\quad \text{rank}A = \text{rank}A^c$
1 soluzione

$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

- SCAMBIARE
- COMB. LIN. $R_j + aR_i$
- PRODOTTO × SCALARE aR_j

d) CRAMER si usa solo con $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ $\det A \neq 0$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \det A = -1$$

$$x = \frac{\det D_x}{\det A} \qquad y = \frac{\det D_y}{\det A}$$

$$\det D_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad x = 3$$

$$\det D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad y = -2$$

2) a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$ $\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$$\operatorname{rank} A^c = \underset{R_3 - R_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

x essere ridotta ogni elemento sotto deve avere tutti 0

$\operatorname{rank} A = 3 = \operatorname{rank} A^c = r \longrightarrow 2$ soluzioni

$n - r = 2$

$5 - 3$

$$\frac{R_2 - R_3}{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = -1 \\ x_3 + 3x_4 = -3 \longrightarrow x_3 = -3 - 3x_4 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 + 2 = 1 \\ x_3 + 3x_4 + 2 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ x_3 + 3x_4 = -3 \\ \text{—} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = -1 \\ x_3 = -3 - 3x_4 \\ \text{—} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1 - x_4 + 3x_2 \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases}$$

1) $\begin{cases} 2x = 3 \\ 4y = 1 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{cases} x = 3/2 \\ y = 1/4 \end{cases}$

$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ rank $A = 2$, rank $A^c = 2$ $\longrightarrow$ sol $= \infty^{2-1} = \infty^1 \rightarrow 1$ sola soluzione

2) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2y = 4 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{cases} x = -1/2 \\ y = 2 \end{cases}$

$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ $\quad$ rank $A = 2$, rank $A^c = 2$ $\longrightarrow$ SOLUZIONI : $\infty^{2-2} = 1$ SOLUZIONE

3) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

rank $A = \det(A) = 2 - 3 = -1$ NON SINGOLARE $\rightarrow$ rank $= 2$

$$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{cases} 2x + y + 5z = -3 \\ x - y + z = 0 \\ -x + 7y - 2z = 1 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Rank } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 / 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

3) a) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\tilde{A}x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{A}^c = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

rank $\tilde{A} = 2$
$=$ rank $\tilde{A}^c$

COMPATIBILE
1 SOL.
$x = 0$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1/2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rank $A^c = 1 =$ rank A

COMPATIBILE
$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\tilde{A}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

rank $A = 2$
rank $A^c = 2$
1 SOL.

d) $\tilde{A}x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$

rank $A = 2 =$ rank A^c
1 SOL

e) $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^c = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

rank $A = 1$

$\xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

rank $A^c = 2$

f) $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1/2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

4) a) $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 2 \\ -x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow$ trovare

$$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3-\alpha & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{rank } A = \begin{cases} \text{se } \alpha = 3 \longrightarrow \text{rank } A = 2 = \text{rank } A^c \\ \text{se } \alpha \neq 3 \longrightarrow \text{NON COMPATIBILE} \end{cases}$$

$$\alpha = 3 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad x = \begin{pmatrix} 13/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \beta x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

• TROVARE β se esistono sol. non banali.

$Ax = 0$ OMOGENEO COMPATIBILE $\quad x = 0$ almeno

$\text{rank} A < n \longleftrightarrow \det A = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \beta \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & \beta \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (4-12) + (12-2\beta) = 4 - 2\beta = 0 \quad \beta = 2$$

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2/2]{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ \forall x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad x = x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ALTRI ES:

1) Determinare le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rank } A = \det A = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(2+2) - (1-4) - (-1-4) =$$

$$= 4 + 3 + 5 = 12 \neq 0$$ NON SINGOLARE

$\text{rank} A = 3$

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad \text{rank } A^c = 3 \qquad \text{rank} A = \text{rank} A^c \to \infty^0 = 1$$

1 SOLUZIONE

CRAMER:

$$\det Dx_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4(2+2) - 2(2+2) = 16 - 8 = 8$$

$$\det Dx_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(4-2) - 2(-2-8) = -2 + 20 = 18$$

$$\det Dx_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+4) + 2(-2-8) = -2 - 20 = -22$$

$$x_1 = \frac{\cancel{8}}{\cancel{12}} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{\cancel{18}}{\cancel{12}} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{6}} = \frac{3}{2} \qquad x_3 = -\frac{\cancel{22}}{\cancel{12}} = -\frac{11}{6} \qquad x = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 3/2 \\ -11/6 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rank}(A) \rightarrow \det A = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (8-2) + \cancel{(4-4)} + 2(1-4) = 6-6 = 0$$

$\downarrow$

SINGOLARE
NO RANK MAX

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0$$ NON SINGOLARE

$\downarrow$

$\text{rank}A = 2$

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \det(A^c) = 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (8-2) = 6 \neq 0$$ NON SING.

$\downarrow$

$\text{rank}A^c = 3$

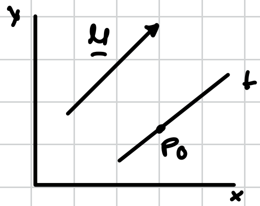
$\text{rank}A < \text{ran}A^c \rightarrow$ no soluzioni

RETTE NEL PIANO

16-10-2024

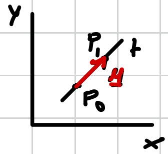
RETTE NEL PIANO

sia $\underline{u}=(\alpha;\beta)$ e $P_0=(x_0;y_0)$



$$r:\begin{cases} x = x_0+t\alpha \\ y = y_0+t\beta, \quad t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

- Siano 2 punti $P_0=(x_0,y_0)$ e $P_1=(x_1;y_1)$ e scriamo l'eq. parametrica della retta nel piano



Quindi identifichiamo come $\underline{u}$ il vettore $\underline{u}=\overrightarrow{P_0P_1}=\underline{P_1}-\underline{P_0}=(\underbrace{x_1-x_0}_{\alpha};\underbrace{y_1-y_0}_{\beta})$

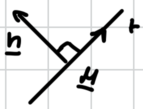
Supponiamo che la retta passi per P_0:

$$\rightarrow r:\begin{cases} x = x_0+(x_1-x_0)t \\ y = y_0+(y_1-y_0)t\end{cases}$$

Es: Dati $P_0(1;-2)$ $P_1=(3;4)$ scrivere l'eq. parametrica della r passante per P_0 e P_1.

$$r:\begin{cases} x = x_0+(x_1-x_0)t = 1+(3-1)t \\ y = y_0+(y_1-y_0)t = -2+(4+2)t\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+6t\end{cases}$$

OSS: Data l'eq. parametrica di una r il vettore $\underline{n}=(\beta;-\alpha)$ è $\perp$ (normale) alla retta.



DIM: $\underline{u}=(\alpha;\beta)$ $\quad \underline{n}(\beta;-\alpha)$ $\quad \underline{n}\cdot\underline{u}=(\beta,-\alpha)(\alpha;\beta)=\cancel{\beta\alpha}-\cancel{\alpha\beta}=0 \quad \underline{n}\perp\underline{u}$

Dall' eq. parametrica a quella cartesiana:

$$r:\begin{cases} x = x_0+\alpha t \\ y = y_0+\beta t\end{cases}$$

dalla prima eq. ci ricaviamo t e la sostituiamo alla seconda

$$\alpha t = x-x_0 \quad t=\frac{x-x_0}{\alpha} \rightarrow y=y_0+\frac{\beta}{\alpha}(x-x_0) \xrightarrow{\alpha\neq 0} (y-y_0)\frac{\beta}{\alpha}(x-x_0)$$

$$\rightarrow \alpha(y-y_0)=\beta(x-x_0) \rightarrow \boxed{\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0}$$

eq. CARTESIANA NELLA RETTA NEL PIANO

In forma estesa: $\beta x-\beta x_0-\alpha y+\alpha y_0=0$

$\rightarrow \beta x-\alpha y-\beta x_0+\alpha y_0=0$

NOTAZIONE: $\beta=a$; $-\alpha=b$; $-\beta x_0+\alpha y_0=c$ $\rightarrow ax+by+c=0 \rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

! con questa notazione $\underline{n} = (\beta; -\alpha) = (a; b)$

1 **Es:** Scrivere l'eq. cartesiana implicita della retta passante per $\underline{P_0} = (\underset{x_0}{2}; \underset{y_0}{-1})$ e // a $\underline{u} = (1; 3)$, $\beta = a$, $\alpha = -b$

$c = -\beta x_0 - \alpha y_0 = -3 \cdot 2 - 1(-1) = -7$

$r: 3x - y - 7 = 0$ anche $3(x-2) - (y+1) = 0$

2 **Es:** Determinare l'eq. cart. implicita di r passante per $P_0(\underset{x_0}{2}; \underset{y_0}{-3})$ e $\perp$ al vettore $\underline{n} = (4; 5)$

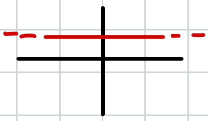
$\alpha = 4 = a \quad \beta = 5 = b \rightarrow r: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \rightarrow 4(x-2) + 5(y+3) = 0$

$4x - 8 + 5y + 15 = 0$

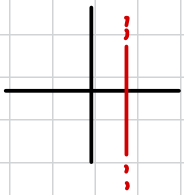
$4x + 5y + 7 = 0$

- Al variare di a, b e c si hanno "RETTE SPECIALI":

- $a = 0 \rightarrow by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{c}{b} \rightarrow$ r ORIZZONTALE // all'asse x e $\perp$ al vettore $\underline{n} = (0; b)$



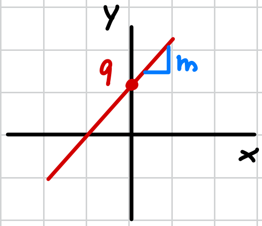
- $b = 0 \rightarrow ax + c = 0 \rightarrow$ retta verticale // asse y



- $c = 0 \rightarrow ax + by = 0 \rightarrow$ retta passante per l'origine

- $b \neq 0$ posso derivare l'eq. cartesiana esplicita della retta:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow \frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0 \rightarrow y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}x \underbrace{-\frac{c}{b}}_{q} = mx + q$$



al variare di m cambia la pendenza della retta e q TERMINE NOTO ovvero il punto dove interseca l'asse y.

Es: utilizzare la forma cartesiana esplicita x trovare la retta passante per $P_0(1;-2)$ $P_1(3;4)$

$$r: \begin{cases} y_0 = mx_0+q \\ y_1 = mx_1+q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = m+q \\ 4 = 3m+q \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m=-2-q \\ 4=-6-3q+q \end{matrix} \quad \begin{cases} m=3 \\ 10=-2q \end{cases} \quad q=-5$$

$$r: y=3x-5 \rightarrow 3x-y-5=0$$

Posizione di 2 rette nel piano
(se si intersecano o no)

$r: ax+by+c=0$
$r': a'x+b'y+c' \neq 0$

Per capire le posizioni di 2 rette bisogna trovare i punti x e y $P(x;y)$ appartenenti a entrambe le rette. ovvero i punti le cui coordinate x, y soddisfano contemporaneamente le 2 eq. → x,y sono soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c=0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad B = C = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$

$$A^c = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right] \rightarrow \text{applichiamo rouche-capelli}$$

1) $rank(A)=1 \rightarrow det(A)=0 \rightarrow ab'-a'b=0$

↳ $rank(A^c)=1=rank(A)<2=$ n° variabili $\rightarrow \infty^1$
↓
RETTE COINCIDENTI

↳ $rank(A^c)=2>rank(A) \rightarrow$ NO SOLUZIONI
RETTE PARALLELE

2) $rank(A)=rank(A^c)=2=$ n° incognite → 1 soluzione
RETTE INCIDENTI

<u>oss</u>: per vedere se sono perpendicolari faccio il prodotto scalare e se è $=0$ sono $\perp$

<u>oss</u>: Per vedere se sono // potevo fare un altro ragionamento e $r // r' \rightarrow \underline{n} // \underline{n}'$ quindi $(a,b) = \lambda(a',b')$

$$\begin{cases} a=\lambda a' \\ b=\lambda b' \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{a}{a'} \rightarrow b = \frac{a}{a'}b' \rightarrow a'b=ab',$$ questa condizione dice che sono o // o coincidenti
↳ se $c=\lambda c'$ sono coincidenti se no //

$A^c = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \lambda a' & \lambda b' & \lambda c' \end{bmatrix} \to rank(A^c) = 1 \to$ coincidenti

Es: $r: x + 2y - 5 = 0$
$r': 3x + 6y - 7 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 6 - 6 = 0 \to rank(A) = 1$

$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{array}\right)$ $rank(A^c) = 2 > rank(A) = 1 \to$ no soluzioni sono $//$

altro modo: $\begin{cases} a = 1 = \lambda \cdot a' = 3 \\ b = 2 = \lambda \cdot b' = 6 \end{cases} \to \lambda = \frac{1}{3} \to c \neq \lambda c' \to r // r'$

Es: $\begin{cases} r: 2x - 3y + 1 = 0 \\ r': 6x - 9y + 3 = 0 \end{cases} \to r = \lambda r' \to r \equiv r'$ coincide

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -18 + 18 = 0 \to rank(A) = 1$

$A^c = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 6 & -9 & -3 \end{array}\right)$ $rank(A^c) = 1 = rank(A) < 2 =$ n° incognite $\to \infty$ soluzioni

COINCIDENTI

GEOMETRIA ANALITICA

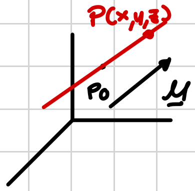
GEOMETRIA ANALITICA

21-10-2024

1) RETTE NELLO SPAZIO

- eq. parametrica di una retta nello spazio $\longrightarrow$ $\underline{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$: vettore DIRETTORE

  $\hookrightarrow$ passante per $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$



$$\overrightarrow{P_0P} = \underline{P} - \underline{P_0} = t\underline{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\longrightarrow r: \begin{cases} x - x_0 = t\alpha \\ y - y_0 = t\beta \\ z - z_0 = t\gamma \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \overset{P_0}{\boxed{x_0}} + t\overset{u}{\boxed{\alpha}} \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$

- eq. parametrica della retta passante per 2 punti: $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $\quad P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$r: \begin{cases} x - x_0 = (x_1 - x_0)t \\ y - y_0 = (y_1 - y)t \\ z - z_0 = (z_1 - z_0)t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \underset{P_0}{\boxed{x_0}} + \underset{u}{\boxed{(x_1 - x_0)}}t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

- eq. cartesiana della retta nello spazio

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \longrightarrow$$ come x il piano, esplicitiamo t da una eq. e la inseriamo nelle altre

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha} \longrightarrow y = y_0 + \beta\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right) \longrightarrow \alpha(y - y_0) = \beta(x - x_0)$$

$$z = z_0 + \gamma\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right) \longrightarrow \alpha(z - z_0) = \gamma(x - x_0)$$

$$\begin{cases} \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \\ \gamma(x - x_0) - \alpha(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

la retta è formata dai punti che risolvono quel sistema

Es: trova l'eq. cartesiana della r passante x 2 punti $P_0(3; -2; 1)$ $\quad P_1(-2; 5; 4)$

$$r: \begin{cases} x = 3 + (-2-3)t = 3 - 5t \\ y = -2 + (5+2)t = -2 + 7t \\ z = 1 + (4-1)t = 1 + 3t \end{cases} \longrightarrow \underline{u} = (-5; 7; 3)$$

dalla I eq. posso dire che $t = \frac{-x+3}{5}$ $\rightarrow$ $y = -2+7\left(\frac{3-x}{5}\right)$ $= \begin{cases} 5y = -2 + \frac{21-7x}{5} \\ 5z = 1 + \frac{9-3x}{5} \end{cases}$

$z = 1+3\left(\frac{3-x}{5}\right)$

$\downarrow$

$$\begin{cases} 7x + 5y - 11 = 0 \\ 3x + 5z - 14 = 0 \end{cases}$$

Es: date l'eq. cartesiana di r : $\begin{cases} x+y=2 \\ x-z=-1 \end{cases}$ trovare la corrispondente parametrica

1) prendo un'incognita e la si pone $= t$
2) si sostituisce in tutte le eq.
3) si risolve

$z = t \rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-t=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1+t+y=-2 \\ x=-1+t \end{cases} = \begin{cases} y = 3-t \\ x=-1+t \end{cases} = \begin{cases} x=-1+t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$

$P_0 = (-1; 3; 0)$
$\underline{u} = (1; -1; 1)$

POSIZIONE RETTE NELLO SPAZIO

Consideriamo le eq. parametriche di 2 r:

r: $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$ r': $\begin{cases} x = x_0' + t\alpha' \\ y = y_0' + t\beta' \\ z = z_0' + t\gamma' \end{cases}$

$\downarrow$ $\downarrow$

$\underline{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ $\underline{u}' = (\alpha', \beta', \gamma')$

$P_0 = (x_0; y_0, z_0)$ $P_0 = (x_0', y_0', z_0')$

1) se r e r' sono complanari $\rightarrow$ il prodotto misto $= 0 \rightarrow \underline{u}(\underline{u}' \times (P_0 - P_0')) = 0$
(dei vettori)

$\downarrow$

$$\det = \begin{bmatrix} u \\ u' \\ P_0 - P_0' \end{bmatrix} = 0$$

a) Per vedere se sono anche parallele devo verificare se esiste $t \in \mathbb{R}$: $\underline{u} = \lambda \underline{u}'$
$\begin{cases} \alpha = \lambda\alpha' \\ \beta = \lambda\beta' \\ \gamma = \lambda\gamma' \end{cases}$

b) x vedere se sono coincidenti verifico $P_0 = P_0'$

c) Se volessi verificare se sono ortogonali devo verificare il prodotto scalare tra $\underline{u} \cdot \underline{u}'$, se è nullo allora sono $\perp$

Due rette non complanari si dicono SGHEMBE $\rightarrow \det\begin{pmatrix} u \\ u_1 \\ P_0 - P_0' \end{pmatrix} \neq 0$

OSS! in 2D se 2 rette non si toccano sono parallele, in 3D se 2 rette non si toccano possono essere parallele o sghembe.

OSS: si può verificare se sono sghembe dalle eq. cartesiane

$$r: \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \qquad r' = \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x - y - z = -2 \\ 3x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$4 \times \underline{3}$

$$\text{rank}(A) = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\cancel{(-1+1)} + (2+3) + (2+3) = 10 \neq 0 \quad \text{rank}(A) = 3$$

$$\text{rank}(A^c) = \text{rank}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \det(A^c) = 11 \neq 0$$

$$\text{rank}(A^c) = 4$$

$$\text{rank}(A^c) \underset{>}{\neq} \text{rank}(A)$$

NO SOLUZIONI

NON SONO INCIDENTI

PARALLELE — SGHEMBE

verifichiamo che non sono parallele: passiamo x le eq. parametriche

$$r: \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$z = t \rightarrow \begin{cases} x - y + t + 1 = 0 \\ 2x - y - t + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y - t - 1 \\ 2y - 2t - 2 - y - t + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t \end{cases}$$

$\underline{u} = (2; 3; 1)$

$P_0 = (-1, 0, 0)$

$$r' = \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$$

$$z=t \longrightarrow \begin{cases} 3x+y+t=0 \\ x+y-2t=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=-3x-t \\ x-3x-t-2t=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=-3\left(\frac{1-3t}{2}\right)-t \\ x=-\frac{3t+1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-3/2+7/2\,t \\ x=-\frac{3t+1}{2} \end{cases}$$

FINISCI!

<u>oss</u>: avendo le eq. parametriche delle 2 rette potevo modificare che erano sghembe valutando il prodotto misto.

PIANI NELLO SPAZIO

- **eq. cartesiana del piano**

$P_0=(x_0, y_0, z_0)$ $\underline{n}=(a,b,c)$ scrivere l'eq. cart. di π ortogonale a $\underline{n}$ e passante per P_0.

<u>oss!</u> ogni punto del piano è tale per cui il vettore $P-P_0$ è $\perp$ al vettore $\underline{n}$ $\longrightarrow$ $n\cdot(P-P_0)=0$

quindi $\pi = \{P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : n(P-P_0)=0\}$

↳ esplicitando otteniamo $n(P-P_0)=(a,b,c)(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0$$
$$ax+by+cz\underbrace{-(ax_0+by_0+cz_0)}_{d}=0$$

$$\pi = ax+by+cz+d=0$$

oss: $\underline{n}$ è detto vettore caratteristico o normale di π.

Es: scrivere eq. del piano passante per $P_0=(1,-2,5)$ e $\perp$ a $\underline{n}=(2,-3,4)$

$a=2$, $b=-3$, $c=4$; $d=-ax_0-by_0-cz_0=-2(1)-(-3)(-2)-4\cdot5=-28$

$$\pi = 2x-3y+4z-28=0$$

- Siano $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $P_1 = (\quad)$ $P_2 = (\quad)$
scrivere l'eq. del piano passante x 3 punti.

Se π ha i 3 punti $\to$ i vettori $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$, $P - P_0$ so complan. allora il prodotto misto è nullo.

$$(P - P_0)(P_1 - P_0 \times P_2 - P_0) = 0$$

$$\pi = \det \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Es: $P_0 = (1,0,1)$ $P_1 = (-1,2,0)$ $P_2 = (1,1,2)$ scrivere l'eq. cart. del piano che li contiene

$$\pi : \det \begin{bmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det = 3x + 2y - 2z - 1 = 0$$

$\pi = 3x + 2y - 2z - 1 = 0$ $\quad \underline{n} = (3, 2, -2)$

- Piani "speciali":

$\pi = ax + by + cz + d = 0$

$\hookrightarrow a = 0 \to \pi$ // all'asse x
$\hookrightarrow b = 0 \to \pi$ // " " y
$\hookrightarrow c = 0 \to$ " " " " z
$\hookrightarrow a = b = 0 \to \pi$ // al piano $(x;y) \to \pi \perp z$
$\hookrightarrow a = c = 0 \to$ " " " (x,z) " $\pi \perp y$
$\hookrightarrow b = c = 0 \to$ " " " (y,z) " $\pi \perp x$

- reciproco tra 2 piani

$\pi : ax + by + cz + d = 0$ con $\underline{n} = (a,b,c)$
$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ con $\underline{n}' = (a', b', c')$

trovare i punti che stanno su ogni piano $P = (x, y, z)$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$; $D=\begin{bmatrix} -d \\ -d' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ $\quad x=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$A^c=\begin{bmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{bmatrix}$

- $\text{rank}(A)=1$
  - $\to \text{rank}(A)=\text{rank}(A^c)=1 <$ n° incognite $=3 \to \infty^{3-1}=\infty^2$ soluzioni
    I PIANI COINCIDONO
  - $\to \text{rank}(A^c)=2 \neq \text{rank}(A)=1 \to$ non esistono soluzioni $\to$ piani //
- $\text{rank}(A)=2=\text{rank}(A^c)<3=$ n° incognite $\to \infty^1$ soluzioni
  i 2 piani sono incidenti e si intersecano in una retta

I 2 piani sono incidenti sono anche $\perp$ se

$\underline{n} \perp \underline{n}' \iff \underline{n}\cdot\underline{n}'=0 \to (a,b,c)\cdot(a',b',c')=0 \to aa'+bb'+cc'=0$

oss: nel caso di piani incidenti il sistema formato dalle eq. dei 2 piani dalle eq. cartesiane delle rette di intersezione.

Es: dati i piani:

$\pi^1: 2x-y+z=2 \quad n_1=(2,-1,1)$

$\pi_2: 4x-2y+3z=4 \quad n_2=(4,-2,3)$

trovare le posizioni reciproche

$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$: $\text{rank}(A)=2$

$A^c=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right]$ $\quad \text{rank}(A^c)=2$

$\text{rank}(A)=\text{rank}(A^c)=2<3=$ n° incognite $\to \infty^1$ soluzioni
i piani si intersecano in 1 retta

$\underline{n}_1\cdot\underline{n}_2=(2,-1,1)(4,-2,3)=8+2+3=13\neq 0$ non sono $\perp$

La retta di intersezione è data da:

$$r: \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 4x-2y+3z=4 \end{cases}$$

si può ricavare l'eq. parametrica di r:

$z = t$: $\begin{cases} 2x - y + t = 2 \quad y = 2x + t - 2 \\ 4x - 2y + 3t = 4 \to 4x - 2(2x + t - 2) + 3t = 4 \to -2x + 4 + 3t = 4 \end{cases}$

riprovo

con $x = t$

$\begin{cases} 2t - y + z = 2 \quad z = 2 - 2t + y \to z = \cancel{2-2t}\ \cancel{-2+2t} = 0 \\ 4t - 2y + 3z = 4 \quad 4t - 2y + 6 - 6t + 3y = 4 \quad y - 2t + 2 = 0 \quad y = -2 + 2t \end{cases}$ fine

$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = 0, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

ESERCITAZIONE
RETTE NEL PIANO

23/10/2024

1) passanti per $P = (3, -5)$ trovare eq. cart. di r e s

$r' = \underset{a}{x} + \underset{b}{2}y - 4 = 0$

$r \parallel r'$

$\underline{n} = (a, b)$

$\underline{n} = (1; 2)$

$s' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

$s \parallel s'$

$s \parallel \underline{v} = (2, 1)$

$s : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 + t \end{cases}$ $\cancel{t = \frac{x-3}{2}}$ $t = y + 5)$

$r \parallel r' \longrightarrow r \quad x + 2y + c = 0$

$x - 3 = 2y + 10 \qquad x - 2y - 13 = 0$

c? TC $P \in r'$

$3 + 2(-5) + c = 0$

$c = 7 \longrightarrow r : x + 2y - 7 = 0$

28-10-2024

1) PIANO π PASSANTE PER $A = (1, 2, 1)$ $B = (1, 3, -1)$ $C = (0, 2, -2)$

$\pi : ax + by + cz + d = 0$ → eq. piano

a. scrivere vettore

$\underline{N} = (a, b, c)$

se ho piano e 3 punti con il prodotto vettoriale posso trovare $\perp$

$\underline{AB} \times \underline{AC} = \underline{N}$

$\underline{AB} = (0, 1, -2)$ $\underline{AC} = (-1, 0, -3)$

$\underline{N} = \underline{AB} \times \underline{BC} = -3\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$

$\pi : -3x + 2y + z + d = 0$ → fascio di piani

per trovare d impongo che un dei punti appartenga al piano

$-3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 + d = 0 \quad d = -2$

↳ $\pi : -3x + 2y + z - 2 = 0$

b. il secondo modo usa il concetto di complanarità: i 3 vettori devono essere complanari

$ax + by + cz + d = 0$ $P = (x, y, z) \in \pi$ TC $\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}$ siano complanari

$\underline{AP} \times (\underline{AB} \times \underline{AC}) = 0$

$\underline{AP} = (x-1,\ y-2,\ z-1)$

$$\det\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad -3x+2y+z-2=0$$

2) verificare che i piani non hanno punti in comune

$\pi : 2x-3y+z=0$

$\pi_1 : x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}$

$\pi \wedge \pi_1 \neq 0 \iff \pi // \pi'$ e PARALLELI DISTINTI

$\underline{n} = (2,-3,1) \perp \pi \qquad \underline{N}' = (1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \perp \pi_1$

$\downarrow$

Sono paralleli xchè proporzionali

$\underline{N} = 2\underline{N}_1$

$$\text{rank} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 1$$

$\downarrow$

Calcolo intersezione

$$\pi \wedge \pi_1 : \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1/2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$\text{rank}(A)=1 \neq \text{rank}(A^c)=2$

3) $\pi : x-2y+4z+d=0$

$\pi_1 : 2x+3y+z-11=0$

$P=(1,2,3)$

a) verifichiamo che $\pi \perp \pi_1$
prodotto scalare

$\underline{N} = (1,-2,4) \perp \pi$

$\underline{N}_1 = (2,3,1) \perp \pi'$

$\underline{N} \cdot \underline{N}_1 = 2-6+4=0$ ok

b) determinare $d \in \mathbb{R}$ tc $P \in \pi$

$d=-9$ sostituisco P in π

c) scrivere eq. parametrica $\pi \wedge \pi_1 = r$

1) PIANO π PASSANTE PER $A=(1,2,1)$ $B=(1,3,-1)$ $C=(0,2,-2)$

$\pi: ax+by+cz+d=0 \rightarrow$ eq. piano

$$\pi = \left(\det \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0 \right)$$

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1-1 & 3-2 & -1-1 \\ 0-1 & 2-2 & -2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{-2} \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1(-1)^4 \begin{vmatrix} x-1 & z-1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} -2(-1)^5 \begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$[-3(x-1)-(-1)(z-1)]+2(+1(y-2)) =$

$-3x+3+z-1+2y-4 =$

$-3x+2y+z-2=0$

2) verificare che i piani non hanno punti in comune

$\pi: 2x-3y+z=0$

$\pi_1: x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}$

$\pi \wedge \pi_1 \neq 0 \iff \pi // \pi'$ e PARALLELI DISTINTI

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$\text{rank}(A)=1$

$\text{rank}(A^c)=2$ $\quad$ $\text{rank}(A^c)>\text{rank}(A)$

$2>1$ NO SOLUZIONI SONO //

3) $\pi: x-2y+4z+d=0$

$\pi_1: 2x+3y+z-11=0$

$P=(1,2,3)$

a) verifichiamo che $\pi \perp \pi_1$
prodotto scalare

$(a,b,c)\cdot(a',b',c')=0$

$(1,-2,4)\cdot(2,3,1)=0$

$2-6+4=0$ OK SONO $\perp$

b) determinare $d\in\mathbb{R}$ TC $P\in\pi$

$P=(1,2,3)$ $\quad 1-2\cdot2+4\cdot3+d=0$

$1-4+12+d=0$

$d=-9$

c) scrivere eq. parametrica $\pi\wedge\pi_1=r$

$$\begin{cases} x-2y+4z=9 \\ 2x+3y+z=11 \end{cases}$$

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2/7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$\text{rank}(A)=2$

$=$

$\text{rank}(A^c)=2$

∞^1 c'è retta

$$\begin{cases} x+2z=7 \\ y-z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2t=7 \\ y-t=-1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=7-2t \\ y=-1+t \\ z=t \end{matrix}$$

$t=z$

$P_0=(7;-1;0)$

$\underline{u}=(-2;1;1)$

$\pi \wedge \pi' : \begin{cases} x - 2y + 4z = 9 \\ 2x + 3y + z = 11 \end{cases} \longrightarrow$ retta cartesiana

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2/7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

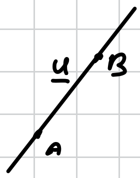
$\text{rank} A = \text{rank} A^c = 2 \quad \infty^1$ RETTA

$$\longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 7 \\ y - z = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

$$\pi \wedge \pi' = A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

rank A / rank A^c	1	2
1	∞^2 SLZ COINCID	$\times$
2	PARALLELI DISTINTI	∞^1 SLZ TRASVERSI RETTA $\pi \wedge \pi'$

4) r per $A = (1, 2, 3)$ $B = (0, 2, 1)$
a) eq. parametrica
b) eq. cartesiana
c) determinare $r \cap \pi$
$\pi: 3x - 2y - 2z + 5 = 0$



a) $\underline{u} = \underline{AB} = (-1, 0, -2) \longrightarrow$ trovo eq. parametrica se ho un vettore e un punto

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad \underline{P} = \underline{P_0} + \underline{u}t$$

b) eq. $\longrightarrow \begin{cases} t = 1 - x \\ y = 2 \\ t = \frac{1}{2}(3 - z) \end{cases}$ $\qquad 1 - x = \frac{1}{2}(3 - z)$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{eq. cart.}$$

c) a) eq. parametrica $r \cap \pi$
sostituisco l'eq. cart. in quella param.

$$3\underbrace{(1-t)}_{x} - \underbrace{4}_{y} - 2\underbrace{(3-2t)}_{z} + 5 = 0$$

$$3 - 3t - 4 - 6 + 4t + 5 = 0$$

$t - 2 = 0 \quad t = 2 \quad$ r. incidente in $P = (1-2, 2, 3-4)$
$(-1, 2, -1)$

se $\nexists\, t$ rc $\longrightarrow r \parallel \pi$
$\forall t \in \mathbb{R} \longrightarrow t \in \pi \quad r \subset \pi$
se $\exists!\, t$ rc... $\longrightarrow r \cap \pi = P$

4) r per $A=(1,2,3)$ $B=(0,2,1)$

a) eq. parametrica

b) eq. cartesiana

c) determinare $r \cap \pi$

$\pi: 3x-2y-2z+5=0$

a) $\underline{AB} = B-A = (\underset{\alpha}{-1}, \underset{\beta}{0}, \underset{\gamma}{-2})$

$$r: \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \\ z=3-2t \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} +t=1-x \\ y=2 \\ \cancel{-2}t=\frac{z}{-2}-\frac{3}{-2} \end{cases} \quad t=-\frac{z}{2}+\frac{3}{2}$$

$$1-x=-\frac{z}{2}+\frac{3}{2}$$

$$-2x+\frac{1}{\cancel{2}}z-\frac{1}{\cancel{2}}=0 \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ -2x+z-1=0 \end{cases}$$

c) $r \wedge \pi$

$\pi: 3x-2y-2z+5=0$

$u=(-1;0;-2)$

$$3(1-t)-2\cdot 2-2(3-2t)+5=0$$
$$3-3t-4-6+4t+5=0$$
$$-2+t=0$$
$$t=2$$ → sostituisco nell'eq. par.

$$\begin{cases} x=1-2=-1 \\ y=2 \\ z=3-2\cdot 2=-1 \end{cases}$$ interseca in $P=(-1;2;-1)$

5)

$$r: \begin{cases} x-y+z=0 \\ y+3z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+y=1 \\ y+3z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ y+3z=0 \\ x+y=1 \\ y+3z=2 \end{cases}$$

$$A^c=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4-R_2]{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

RANK(A) = 3

RANK(A^c) = 4

$A^c \geq A$

o // o SGHEMBE

↓

sono sghembe

MODO 2: $r \cap \pi$ r. forma cart.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -5 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

risolvo con cramer o gauss

5) posizione rette $\parallel$ o $\perp$ ecc...

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y = 1 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$$

determino se sono $\parallel$ o incidenti o sghembe ecc...

$$r \cap s: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ x + y = 1 \\ y + 3z = 2 \end{cases} \qquad A^c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_4 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$r \nparallel s$ – sono sghembe

$\text{rank}(A) = 3$
$\text{rank}(A^c) = 4$ $\neq$ NO COMPATIBILE $r \cap s = 0$

$r \cap s$ F. CART. ENTRAMBE

$2 \leq \text{rank}(A) \leq 3$
$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A^c) \leq 4$

A^c \ A	2	3
2	∞^1 SOL. RETTA $r = s$ COINCIDONO	X
3	$r \parallel s$ DISTINTE	$\infty^0 = 1$ SOL. = PUNTO INCIDENTI
4	X	SGHEMBE

6) $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$

a) INCIDENTI / COINC. / SGHEMBE / PARALLELE DISTINTE

sostituisco nell'eq. parametrica

$$\begin{cases} \cancel{-(1+2t)+1-t}+3t = 2 \\ \cancel{3}(1-t)\cancel{+3t} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0t = 2 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE
o SGHEMBE o $\parallel$ DISTINTE
↳ vettori direzione e vedo se sono
$\parallel$ o l'altra

$\underline{u}_r = (2,-1,3)$

$\underline{u}_s = (-1,1,1) \times (0,3,1) = -2\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$ Sono // $\underline{U}_r = -\underline{U}_s \rightarrow r // s$

b) π passa per r e s

CONICHE NEL PIANO

16-10-2024

CONICHE NEL PIANO

DEF: In un piano $\mathbb{R}^2$ una conica è un luogo di punti definito da:

$$a_{1,1}x^2+2a_{1,2}xy+a_{2,2}y^2+2a_{1,3}x+2a_{2,3}y+a_{3,3}=0$$

- In particolare $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ e $a_{2,2}$ non possono essere contemporaneamente nulli
  - $a_{1,1}x^2+2a_{1,2}xy+a_{2,2}y^2 \rightarrow$ TERMINE QUADRATICO $\neq 0$
  - $2a_{1,3}x+2a_{2,3}y \rightarrow$ TERMINE LINEARE
  - $a_{3,3} \rightarrow$ TERMINE COSTANTE

  → possono essere nulli

L'eq. di una conica può essere scritta come matrice:

$$(x,y,1)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{con } B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ simmetrica}$$

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{matrix}}^{\,A} & \begin{matrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{1,3} & a_{2,3} \end{matrix} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

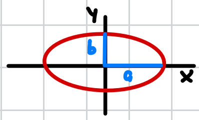
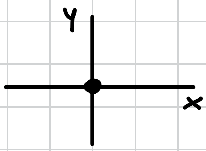
La sottomatrice $A = B_{(3;3)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \rightarrow$ MATRICE DI TERMINI QUADRATI

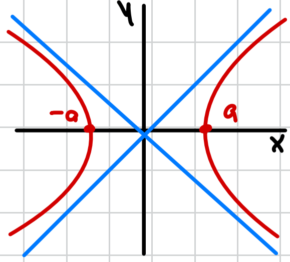
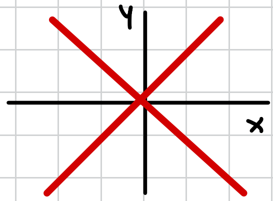
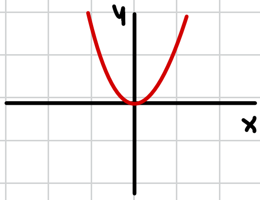
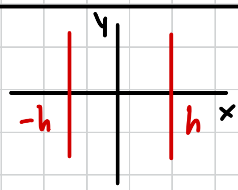
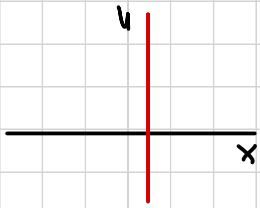
DEF: data una conica e le matrici A e B si definiscono i seguenti INVARIANTI che sono la TRACCIA della matrice A:

- $tr(A) \rightarrow$ INVARIANTE LINEARE
- $\det(A) \rightarrow$ // QUADRATICO
- $\det(B) \rightarrow$ // CUBICO

Il valore degli invarianti permette di riconoscere che tipo di conica si tratta.

Per ogni conica si può fornire una forma canonica sostituendo i parametri

TIPO CONICA	INVARIANTI	FORMA CANONICA
ELLISSE PROPRIA	$\det(A)>0$ $\det(B)<0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 
ELLISSE IMMAGINARIA	$\det(A)>0$ $\det(B)>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$
ELLISSE DEGENERE	$\det(A)>0$ $\det(B)=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ 

IPERBOLE PROPRIA	$\det(A)<0$ $\det(B)\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $a,b>0$	
IPERBOLE DEGENERE	$\det(A)<0$ $\det(B)=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ $a,b>0$	
PARABOLA PROPRIA	$\det(A)=0$ $\det(B)\neq 0$	$2px^2-y=0$ $p>0$	
PARABOLA DEGENERE	$\det(A)=0$ $\mathrm{rank}(B)=2$	$x^2+h=0$ $h<0$	
PARABOLA DOPPIAMENTE DEGENERE	$\det(A)=0$ $\mathrm{rank}(B)=1$	$x^2=0$	

oss: se in una conica ellittica $a=b$ si parla di circonferenza.

ES: Riconosci la conica di eq. $\underset{a_{1,1}}{2x^2}\underset{2a_{1,2}}{-2xy}+\underset{a_{2,2}}{3y^2}\underset{2a_{1,3}}{-2x}\underset{a_{3,3}}{-1}=0$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}=\det(A)=6-1=5>0$$

ELLISSE

$$B=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&3&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow \det(B)=-1\begin{vmatrix}-1&3\\-1&0\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&-1\\-1&3\end{vmatrix}=$$

$$=+3+5=+8>0$$

IMMAGINARIA ELLISSE

ES: riconoscere al variare di $h\in\mathbb{R}$ la conica di eq.: $x^2+2hy^2+2hxy+\frac{x}{2}+y=0$

riordino

$$\underset{a_{1,1}}{x^2}+\underset{2a_{1,2}}{2hxy}+\underset{a_{2,2}}{2hy^2}+\underset{2a_{1,3}}{\frac{1}{2}x}+\underset{a_{2,3}}{y}=0$$

$$A=\begin{pmatrix}1&h\\h&2h\end{pmatrix}\rightarrow \det(A)=2h-h^2=h(2-h)$$

$$B=\begin{pmatrix}1&h&1/4\\h&2h&1/2\\1/4&1/2&0\end{pmatrix}\rightarrow \det(B)=\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}-1\right)$$

h		0		2	
$\det(A)$	$-$		$+$		$-$
$\det(B)$	$-$		$-$		$+$

- $h < 0 \rightarrow \det(A) < 0$; $\det(B) \neq 0 \rightarrow$ IPERBOLE PROPRIA
- $h = 0 \rightarrow \det(A) = 0$, $\det(B) \neq 0 \rightarrow$ PARABOLA PROPRIA
- $0 < h < 2 \rightarrow \det(A) > 0$, $\det(B) < 0 \rightarrow$ ELLISSE PROPRIA
- $h = 2 \rightarrow \det(A) = 0 = \det(B) \rightarrow$ Calcolo rango di $B(h=2)$

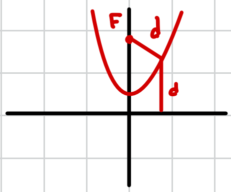
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/4 \\ 2 & 4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rank} = 2$$

PARABOLA DEGENERE

- $h > 2 \rightarrow \det(A) < 0$, $\det(B) > 0 \rightarrow$ IPERBOLE PROPRIA

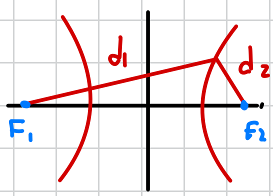
Le coniche possono essere definite anche:

- PARABOLA: LUOGO DEI PUNTI EQUIDISTANTI da un FUOCO F e una RETTA DIRETTRICE



- ELLISSE: LUOGO DEI PUNTI per i quali è COSTANTE LA SOMMA delle DISTANZE DA 2 FUOCHI F_1 e F_2

- IPERBOLE: luogo dei punti per i quali è COSTANTE LA DIFFERENZA delle DISTANZE DA 2 FUOCHI F_1 e F_2



$d_1 - d_2 = \text{costante}$

LIMITI

11-11-2024

LIMITI

DEF: un **LIMITE** è un comportamento locale di una funzione ovvero che nelle vicinanze di un punto X_0 può appartenere o meno al Dom di una funzione. o agli estremi infiniti.

3 TIPI:

1) $X_0 \in D_f$

2) $X_0 \notin D_f$

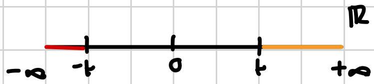
3) intorno a $\pm \infty$

INTORNO: sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$ si definisce intorno di X_0 di raggio t il seguente intervallo aperto e limitato: $I_t(X_0) = (X_0 - t\,;\, x_0 + t) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < t\}$
questo si dice INTORNO DI X_0 CON AMPIEZZA t.

Es: trovare l'intorno di $t = 5$ di $x_0 = 3$ $\quad I_5(x_0 = 3) = (3-5\,;\, 3+5) = (-2\,;\, 8)$

DEF: un intorno di $+\infty$ di estremo inferiore t, $t > 0$ è definito =
$I_t(+\infty) = (t\,;\, +\infty)$

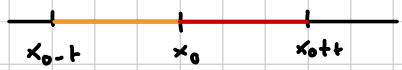
un intorno di $-\infty$ di estremo superiore t, $t > 0$ è definito =
$I_t(-\infty) = (-\infty\,;\, -t)$



OSS: gli intorni di $\pm\infty$ sono intervalli aperti e non limitati

DEF: l'INTORNO DESTRO di X_0 di raggio t è definito =
$I_t^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x < x_0 + t\} = [x_0\,,\, x_0 + t)$

l'INTORNO SINISTRO di x_0 raggio $t > 0$ =
$I_t^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - t < x \leq x_0\} = (x_0 - t\,;\, x_0]$



OSS: $I_t^+(x_0) \cup I_t^-(x_0) = I_t(x_0)$
$I_t^+(x_0) \cap I_t^-(x_0) = X_0$

DEFINIZIONI DI LIMITI:

- Ricordiamo che x_0 può appartenere o meno al D_f.

1) LIMITE FINITO IN UN PUNTO FINITO

sia $x_0 < \infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell < \infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D_f \to 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \downarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D_f \to x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \setminus \{x_0\} \downarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

2) LIMITE FINITO ALL' INFINITO

$x_0 = \pm\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell < \infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M_\varepsilon \geq 0 : \forall x \in D_f : x \geq M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$x \in I_{M_\varepsilon}(\pm\infty) \Leftrightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

3) LIMITE INFINITO IN UN PUNTO FINITO

$x_0 \in \mathbb{R}$; $x_0 < \infty$; $\ell = \pm\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall H \geq 0,\ \exists \delta_H : \forall x \in D_f \to 0 < |x - x_0| < \delta_H \Leftrightarrow f(x) \lesseqgtr H$$

$$x \in I_{\delta_H}(x_0) \setminus \{x_0\} \Leftrightarrow f(x) \in I_H(\pm\infty)$$

4) LIMITE INFINITO ALL' INFINITO

$x_0 = \pm\infty$; $\ell = \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \to \forall H \geq 0,\ \exists M_H \leq 0 : \forall x \in D_f : x \leq M_H \Leftrightarrow f(x) \geq H$$

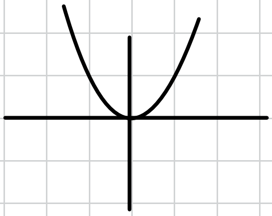
$$x \in I_{M_H}(\pm\infty)$$

<u>OSS:</u> nei casi 1 e 2 ($\ell < \infty$) si dice che $f(x)$ CONVERGE ad ℓ quando $x \to x_0$

nei casi 3 e 4 ($\ell = \pm\infty$) si dice che la $f(x)$ DIVERGE per $x \to x_0$

Es:

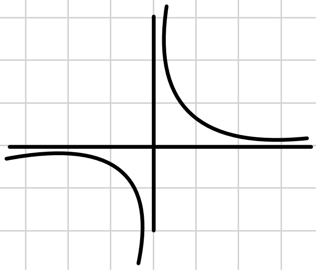
1) $f(x) = x^2$



$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

2) $f(x)\ \frac{1}{x}$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

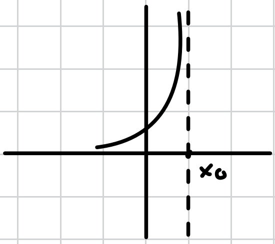
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

DEF: sia $x_0 < \infty$, con x_0 può appartenere o meno a D_f.
Si dice che $f(x)$ ammette **LIMITI LATERALI DESTRO o SINISTRO** quando

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ $\quad$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ $\quad$ ovvero quando la def. di limite è valida x un intorno destro o sinistro di x_0.

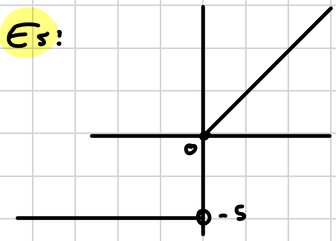
Es:



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

TEOREMA: il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Es:



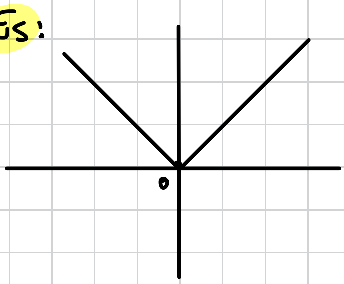
$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -5 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -5$$

$\lim_{x \to 0} f(x) =$ non esiste

Es:

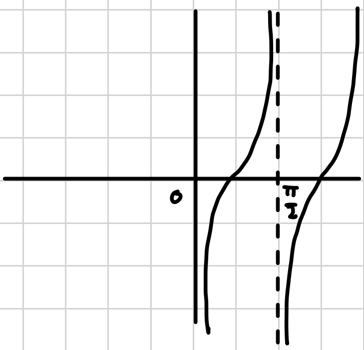


$$f(x) = \begin{cases} x : & x \geq 0 \\ -x : & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ $\rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Es: $f(x) = tg\, x$



$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) \rightarrow$ NON ESISTE

ALGEBRA DEI LIMITI:

• $+\infty + s = +\infty$	$s \in \mathbb{R}, s = +\infty$	• $\frac{\pm\infty}{s} = \mp\infty$	$s<0, s>-\infty$
• $-\infty + s = -\infty$	$s \in \mathbb{R}, s = -\infty$		
• $\pm\infty \cdot s = \pm\infty$	$s>0, s=+\infty$	• $\frac{s}{0} = \pm\infty$	$s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
• $\pm\infty \cdot s = \mp\infty$	$s<0, s=-\infty$		
• $\frac{\pm\infty}{s} = +\infty$	$s>0, s<+\infty$	• $\frac{s}{\pm\infty} = 0$	$s<\infty$

- siano f e g 2 funzioni: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m \end{cases}$

allora:
- $\lim\limits_{x \to x_0} f \pm g = \ell \pm m$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{x \to m} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f \cdot g = \ell \cdot m$
- $\lim\limits_{x \to x_0} k f(x) = k f$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\ell}{m} \qquad g(x) \neq 0$

☐ Calcolo limiti semplici

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[3 + \operatorname{sen}(x \sqrt[3]{x^2})\right]^x = [3+0]^0 = 1$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 3\cos x}{5 + x \operatorname{sen} x} = \frac{0-3}{5+0} = -\frac{3}{5}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - x} = \frac{1-3+1}{1-1} = -\frac{1}{0^-} = \infty$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \qquad x_0 = 1 \notin D_f$

$\to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1-2}{1-2+1} = \frac{-1}{0} = \infty$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

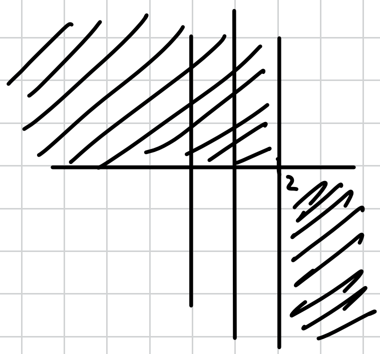
$\to \begin{cases} 1^- = \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ 1^+ = \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}$

elevando al 2 diventa positivo

POSITIVITÀ: $\frac{x-2}{(x-1)^2} > 0$

$(x-1)^2 \longrightarrow$ sempre positivo

$x > 2$

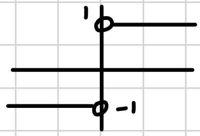


13-11-2024

CONTINUITÀ: si dice f è **LOCALMENTE CONTINUA** in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

si dice **GLOBALMENTE CONTINUA** se è continua in ogni punto del dominio

Es: $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

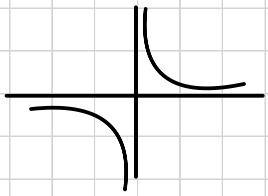


$\lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1 \end{cases} \neq$ NON ESISTE

NON È GLOBALMENTE CONTINUA

È LOCALMENTE CONTINUA TRANNE $x = 0$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$



è globalmente continua xchè $x=0$ non appartiene al dominio

PROPRIETÀ:

- **siano f e g 2 funzioni continue** in $x_0 \in D_f$ e $\in D_g$ allora sono continue le seguenti composizioni di funzioni:

  $(f+g)(x_0)$ $(f-g)(x_0)$

  $(f \cdot g)(x_0)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$ se $g(x_0) \neq 0$

  sia g continua in x_0 e f continue in $y_0 = g(x_0)$ allora $(f \circ g)$ è continua in x_0

DEF: sia f una funzione definita in un intorno di x_0; $x_0 < \infty$ se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1 \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$ allora x_0 è un **PUNTO DI DISCONTINUITÀ**.

Il salto è definito : $[f]_{x_0} = \ell_1 - \ell_2$

DEF: sia f una funzione definita in un intorno di x_0; $x_0 < \infty$. x_0 è un punto di DISCONTINUITÀ eliminabile $\times f$ se, **I SPECIE**:

1) f è **DEFINITA IN x_0 ma $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$**

2) f **NON È DEFINITA IN x_0 ma esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$**

OSS: Nel caso in cui x_0 è **discontinuità eliminabile** possiamo **definire la seguente funzione continua**:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \ell = \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

DEF: un punto di discontinuità non di prima specie e non eliminabile è detto di **SECONDA SPECIE**.

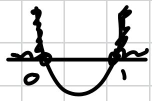
ESERCIZI:

1) $f(x) = \text{sgn}(x^2 - x)$ studia continuità

$x^2 - x > 0$

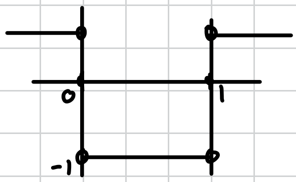
$x(x-1) = 0$

$x = 0 \quad x = 1$



$$\begin{cases} 1 & \text{se } x^2 - x > 0 \quad \text{se } x < 0 \cup x > 1 \\ 0 & \text{se } x^2 - x = 0 \quad \text{se } x = 0 \text{ e } x = 1 \\ -1 & \text{se } x^2 - x < 0 \quad \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$x < 0 \cup x > 1$



$f(x)$ è continua in $(-\infty; 0) \cup (0;1) \cup (1; +\infty)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$x_0 = 0$ è discontinuità di 1 specie

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$

$[f]_{x_0 = 0} = -1 - 1 = -2$

$x_0 = 1$ punto discontinuità di 1 specie $[f]_{x_0=1} = 1 + 1 = 2$

i limiti in 0 esistono ma sono diversi quindi non c'è discontinuità eliminabile

2) Determinare i valori di $\alpha > 0$ per i quali le seguenti funzioni sono globalmente continue

- $f(x) = \begin{cases} \alpha \,\text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) & x > 0 \quad \text{è continua per } x > 0 \\ 2x^2 + 3 & x \leq 0 \quad \text{è continua per } x \leq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} \alpha \,\text{sen}(x + \tfrac{\pi}{2}) = \alpha = \lim_{x \to 0^-} 2x^2 + 3 = 3$$

$\underset{f(x_0) \text{ xchè } \leq 0}{\|}$

$\downarrow$

$\alpha = 3$

$\longrightarrow \begin{cases} 3 \,\text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) & \text{se } x > 0 \\ 2x^2 + 3 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

è continua in tutto il dominio

3) Trovare continuità e valore di $\alpha > 0$ tale che f è continua

$f(x) = \begin{cases} 3e^{\alpha x - 1} & x > 1 \quad \text{è continua per } x > 1 \\ x + 2 & x < 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^+} 3e^{\alpha x - 1} = 3e^{\alpha - 1}$

$3e^{\alpha - 1} = \lim_{x \to 1^-} x + 2 = 3$

$\cancel{3} e^{\alpha - 1} = \cancel{3}$

$e^{\alpha - 1} = 1 \qquad \alpha = 1$

TEOREMI DEL CONFRONTO

1) Siano $f(x)$ e $g(x)$ tali che $f(x) \geq g(x)$ in un intorno di x_0 $\begin{matrix} -\infty \\ \infty \end{matrix}$

- se il $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ allora $\ell \geq m$
- se il $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

$\llcorner$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

TEOREMA DEI 2 CARABINIERI:

Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$:

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un Intorno di x_0 $\swarrow \pm\infty$

e inoltre $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Es: $\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{0} = \infty$

$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \longleftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \qquad 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Es: $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} + \operatorname{sen} x) =$

$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \longrightarrow \sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{x} + \operatorname{sen} x \leq \sqrt{x} + 1$

$+\infty \longrightarrow +\infty \longleftarrow +\infty$

Es: $\lim_{x \to \infty} \frac{2 - \operatorname{sen} x}{3x + \cos x} =$

$\frac{2-1}{3x+1} \leq \frac{2 - \operatorname{sen} x}{3x + \cos x} \leq \frac{2+1}{3x-1}$

$0^- \longrightarrow 0^- \longleftarrow 0^-$

FORME INDETERMINATE

1) $+\infty - \infty$
2) $\pm\infty \cdot 0$
3) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
4) $\frac{0}{0}$
5) $1^{+\infty}$

alcune forme indeterminate danno luogo ai **LIMITI NOTEVOLI**:

1) $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$

3) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

4) $\lim_{x \to 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = 1$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{arcsen x}{1} = 1$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{arctg x}{x} = 1$

10) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

12) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

13) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

14) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Es:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{sen x}{x}}_{1} sen x = 1 \cdot 0 = 0$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{sen 2x - sen 3x}{4x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{sen 2x}{4x} - \frac{sen 3x}{4x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{sen 2x}{2 \cdot 2x}}_{1} - \underbrace{\frac{sen 3x}{4\cancel{x}} \cdot \frac{3\cancel{x}}{3x}}_{1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

3) $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1 - \cos\sqrt{x}}{2x^2} \right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1 - \cos\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2 \, 2x} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(tg x) - 1}{tg x} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos y}{y} \cdot \frac{y}{y} = \frac{1}{2} \cdot y = \frac{1}{2} tg x = \frac{1}{2} \cdot tg 0 = 0$

$tg x = y$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + tg x} - \sqrt{1 - tg x}}{sen x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tg x} - \sqrt{1-tg x}}{sen x} \cdot \frac{\sqrt{1+tg x} + \sqrt{1-tg x}}{\sqrt{1+tg x} + \sqrt{1-tg x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+tg x \cancel{-1}+tg x}{sen x(\sqrt{1+tg x}+\sqrt{1-tg x})}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2} tg x}{sen x \cdot \cancel{2}} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{tg x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{x}{sen x}}_{1} = 1$

LIMITI FUNZIONI RAZIONALI:

Es: $\lim_{x\to +\infty} x^2 - x = +\infty - \infty \qquad \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$

↓

LIMITE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO SOLO x I LIMITI A $\pm\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^3 - x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{-4x^3 + 2x^2 + 1}{600x^2 + 20x^6} \to \lim_{x\to +\infty} \frac{-\cancel{4}x^{\cancel{3}}}{\cancel{20}x^{\cancel{6}}} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{+\infty} = 0$

- $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+2)(x+1)} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}} = "\frac{\infty}{\infty}"$ F.I. $= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\sqrt{6}\cdot\cancel{x}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

- $\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} \cdot \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{\sqrt{6x^2+3}-3x} = \lim_{x\to-1} \frac{x+1(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{6x^2+3-9x^2} =$

$\lim_{x\to-1} \frac{(x+1)\sqrt{6x^2+3}-3x}{3-3x^2} = \frac{\cancel{(x+1)}(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3\cancel{(1+x)}(1-x)} = \frac{\sqrt{9}+3}{+6} = \frac{6}{+6} = +1$

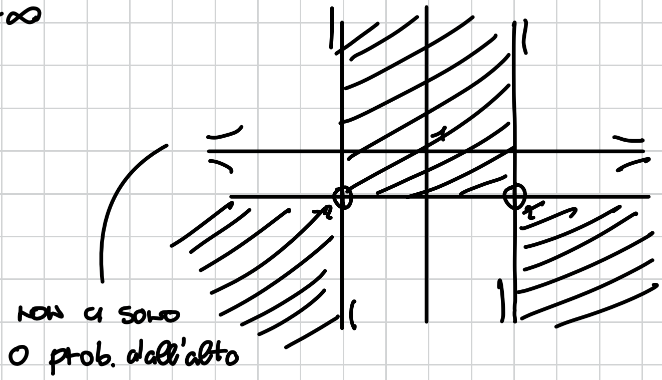
- $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2-4}$

$D_f = x^2-4 \neq 0$
$x \neq \pm 2 \quad (-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty)$

$\lim_{x\to+2^-} \frac{x^2+2x+3}{x^2-4} = \frac{4+4+3}{4-4} = \frac{11}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+3}{x^2-4} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{x^2-4} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$



$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+2x+3}{\underset{-1,99}{x^2-4}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+2x+3}{x^2-4} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to2^+} \frac{x^2+2x+3}{x^2-4} = \frac{4+4+3}{4-4} = \frac{11}{0^+} = +\infty$

$f(x) > 0$

$\frac{x^2+2x+3}{x^2-4} > 0$ N $x^2+2x+3 > 0$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-3}$ >0 sempre

D $x < -2 \lor x > 2$

18 - 11 - 2024

CONFRONTABILITÀ FRA FUNZIONI

DEF: due funzioni si dicono **CONFRONTABILI** in un I_{x_0} $x_0 \begin{cases} <\infty \\ \pm\infty \end{cases}$ se vale $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell < \infty$

In particolare:

1) $\ell \neq \{0;1\}$ $\to$ f e g hanno **STESSO ORDINE DI GRANDEZZA** nell'intorno x_0 $f \asymp g$

2) $\ell = 1$ $\to$ f e g **SONO EQUIVALENTI** nell'intorno x_0 $\to$ $f \sim g$

3) $\ell = 0$ $\to$ f è **TRASCURABILE RISPETTO A g nell'intorno x_0** $\to$ $f = o(g)$

o piccolo

DEF: una funzione f è **INFINITESIMA** nell'intorno x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

viceversa una funzione f è **INFINITA** nell'intorno x_0 se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Es: $f(x) = x^2$ $\to$ infinitesima nell'intorno di 0
$\hookrightarrow$ infinita se $x \to \pm\infty$

DEF: siano f e g 2 funzioni infinitesime o entrambe infinite nell'intorno x_0

1) $f \asymp g$ $\to$ f e g hanno il medesimo ordine di infinitesimo o infinito

2) $f = o(g)$ $\to$ f ha un ordine di infinitesimo superiore a g oppure f ha un ordine di infinito inferiore a g.

3) $g = o(f)$ $\to$ f " " " " " inferiore a g " " " "
" " " superiore a g.

OSS: in un limite si può sostituire una funzione equivalente ad un'altra.

Es: se $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\Rightarrow$ $\operatorname{sen} x \sim x$

se $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{sen} x = o(x)$

se $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{4}}} = 0$ $\Rightarrow$ $f = o(g)$

se $x \to 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x$ $= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\Rightarrow$ $f(x) \sim g(x)$

se $x \to 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = \log(1+x)$, $g(x) = 2x$ $= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{2x} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $f \asymp g$

Es: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x)}$ $\frac{0}{0}$ $= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x)} \cdot \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{tg^3(x-1)}{e^{x-1}-1} \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{tg^3 y}{e^y-1} \cdot \frac{y}{y^3} = 0$

$x-1=y$

GERARCHIA DEGLI INFINITI:

Siano $\alpha,\beta>0$ e $a,b>1$ allora se $x\to+\infty$ si ha: $(\log_b x)^\alpha = o(x^\beta)$ e $x^\beta = o(a^x)$
allora se $x\to+\infty$ allora $(\log_b x)^\alpha \lneq x^\beta \lneq a^x \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_b x)^\alpha}{x^\beta} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0$;

$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_b x)^\alpha}{a^x} = 0$

Es: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\log(1+x)} = +\infty$ Es: $\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{x^{150}} = +\infty$

Es: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^7 + sen^3 x}{x^2} = 0$ Es: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(\log x)^5} = +\infty$

ASINTOTI:

DEF: se il $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell < \infty \Rightarrow$ la retta $x = x_0$ è un **ASINTOTO VERTICALE DESTRO** della funzione f.

DEF: se il $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell < \infty$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ allora la retta $x = x_0$ è un **ASINTOTO VERTICALE SINISTRO**

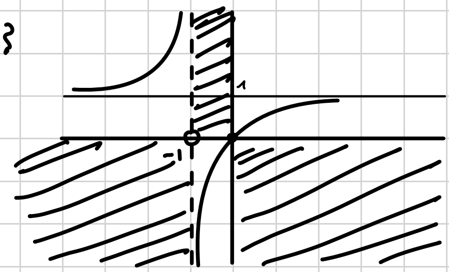
DEF: una retta $y = mx+q$ è un **ASINTOTO OBLIQUO** di $f(x)$ se valgono queste condizioni:

$$\begin{cases} m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} < \infty \\ q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] < \infty \end{cases}$$

OSS: se una funzione ha un asintoto obliquo non può averne uno orizzontale.

Es: Determinare gli asintoti delle seguenti funzioni

- $f(x) = \frac{x}{x+1}$ D_f: $x \neq -1 \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

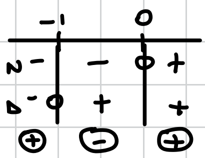


$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$ ASINTOTO ORIZ.

$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

SEGNO: $\frac{x}{x+1} > 0$ $\quad x > 0$ $\quad x > -1$



$- f(x) = \sqrt{1+x^2}$

1) $D_f = 1+x^2 \geq 0$ sempre
   $\llcorner$ solitamente no asintoti verticali

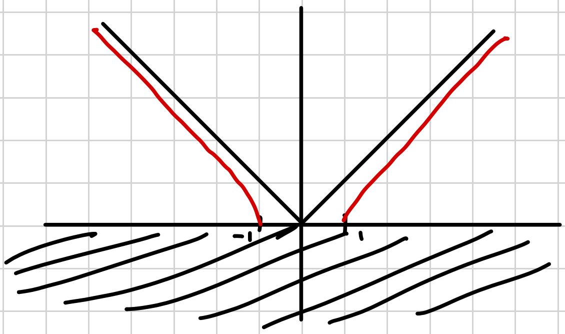
2) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$
   $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$ | NO A.S. ORIZ.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \cancel{\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}} = 1 = m$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} - mx = +\infty - \infty = \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$$

$y = mx+q = x$ è asintoto obliquo a destra

$\lim_{x\to-\infty} \ldots = -1$ $\quad q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = 0$ $\quad y = -x$ A.S.O.S.



3) $\sqrt{1+x^2} > 0$ sempre

Esercizi:

1) stabilire se le funzioni sono continue

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ (x-3)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to2^-} x = 2 = \lim_{x\to2^+} (x-3)^2 = 1$$

$2 \neq 1$ NO CONTINUE $[f]_{x_0=2} = 1-2 = -1$ I specie

b) $g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to1^-} 1-x^2 = 0 = \lim_{x\to1^+} x-1 = 0$$

$0 = 0$ SONO CONTINUE

c) determinare i parametri che rendono continue le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3(ax+3) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} x+1 = 2 = \lim_{x \to 1} (3ax+3) = 3a+3$$

$2 = 3a+3$
$\cancel{3}a = -\frac{1}{3}$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 2 \\ a - \frac{b}{x} & \text{se } 2 < x < 4 \\ 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} a - \frac{b}{x} = a - \frac{b}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to 4^-} a - \frac{b}{x} = a - \frac{b}{4}$$

$$\begin{cases} 0 = a - \frac{b}{2} \\ 1 = a - \frac{b}{4} \end{cases}$$

$a = \frac{b}{2}$ $\quad a = 2$

$1 = \frac{b}{2} - \frac{b}{4} = 1 = \frac{b}{4}$ $\quad b = 4$

ESERCIZI LIMITI:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} x}{x} \text{sen} x = 1 \,\text{sen} 0 = 0$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x + \cancel{\cos^2 x} - \cancel{\cos^2 x}}{3x^2} = \frac{1}{3}$

3) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \text{sen} x}{x} = +\infty$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-2x}{1+2x} = \frac{\infty}{\infty} = -\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}} = -1$

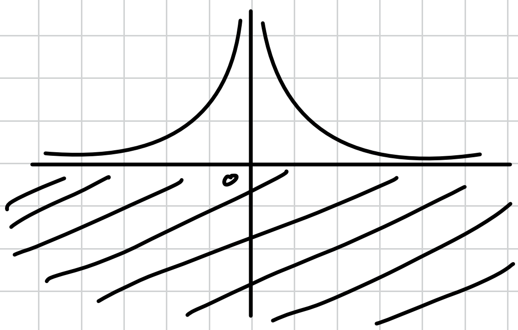
5) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x}{3x^3 + x - 4} = \frac{\cancel{x^2}}{3x^{\cancel{3}}} = \frac{1}{\infty} -$

DOMINIO e LIMITI:

1) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ $\qquad D_f = 1 + x^2 \neq 0$ sempre
$x^2 \neq \pm 1$ sempre

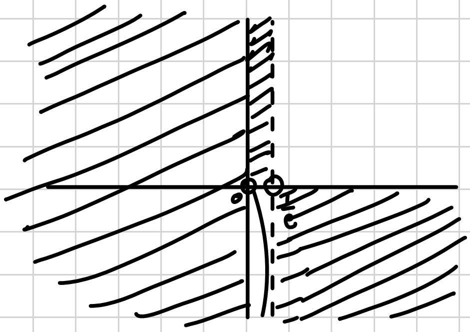
$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = 0$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{1+x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{1+x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



$\frac{e^x}{1+x^2} > 0$ sempre

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\ln x}$



a) $D_f =$ $x > 0$

$1 + \ln x \neq 0$

$\ln x \neq -1$

$x \neq e^{-1} \neq \frac{1}{e}$

$\{x > 0 ; x \neq \frac{1}{e}\}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\ln x} = \dfrac{0}{1-\infty} = 0^-$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\ln x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\ln x} = \dfrac{\sqrt{e^{-1}}}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^+} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\ln x} = \dfrac{\sqrt{e^{-1}}}{0^+} = +\infty$

c) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\ln x} > 0$ $\qquad$ $\sqrt{x} > 0$ sempre

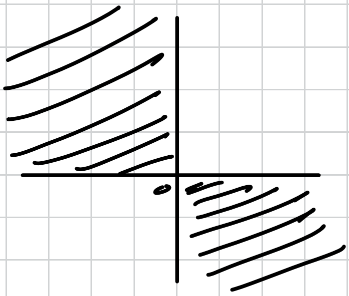
$1 + \ln x > 0$

$\ln x > -1$

$x > e^{-1}$

0		e^{-1}
	+	+
	−	+
	−	+

3) $f(x) = e^{-x^2} \cdot \sqrt[3]{x}$ $\quad$ a) $D_f = \mathbb{R}$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} \cdot \sqrt[3]{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{e^{x^2}} = \dfrac{(x)^{\frac{1}{3}}}{e^{x^2}} = 0^+$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} \cdot \sqrt[3]{x} = \dfrac{(x)^{\frac{1}{3}}}{e^{x^2}} = 0^-$

c) $e^{-x^2} \cdot \sqrt[3]{x} > 0$

e^{-x^2}: > 0 sempre

$\sqrt[3]{x}$: $x < 0$ negativa

$x > 0$ positiva

LIMITI NOTEVOLI:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+3x)}{e^{2x}-1} = \dfrac{0}{0}$ F.I.

$\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\dfrac{\log(1+3x)}{3x}}_{1} \cdot \dfrac{3x}{2x} \cdot \underbrace{\dfrac{2x}{e^{2x}-1}}_{1} = \dfrac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \dfrac{3}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\ln(1+\operatorname{arctg}(x^2))} \cdot \frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{\cos x}+1} = \frac{\cos x - 1}{\ln(1+\operatorname{arctg}(x^2))\sqrt{\cos x}+1} \cdot \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{\operatorname{arctg}(x^2)}$

$\frac{\cos x - 1}{(\sqrt{\cos x}+1)\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \frac{\cos x - 1}{(\sqrt{\cos x}+1)\cdot x^2}$

$-\frac{(\cos x+1)}{(\sqrt{\cos x}+1)x^2} = -\frac{1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}$

ESERCITAZIONE
LIMITI

ESERCITAZIONE LIMITI 25-11-2024

1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1 = f(0)$
f continua in 0

2) $\lim_{x\to 3}(-x^3+2x+1) = -27+6+1 = -20$

3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^\pm} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^\mp} = \mp\infty$ x=0 ASINTOTO VERTICALE

4) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}$

PUNTO DI DISC. ELIMINA.

5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right) = \pm\infty - \infty$ $-\infty$
$\lim_{x\to 0^\pm}\left(\frac{2x-5}{x^2}\right) = -\frac{5}{0^+} = -\infty$

6) $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^3-4}{x^2-4x+3} = \frac{-3}{0^\mp} = \pm\infty$

7) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2-13x+15}{x^2-2x+1} = "\frac{0}{0}" = (x-1)(x^2-2x-15)$

$x^3-3x^2-13x+15$
$(x-1)(x^2-2x-15)$

	1	-3	-13	15
	+	+	+	
1		1	-2	-15
×	1	-2	-15	0

8) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+2x-x^3) = +\infty-\infty$ F.I. $= -x^3 = \mp\infty$
NO ASINTOTO OBLIQUO

9) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^3+x+1}{x^2+3x} = \frac{-2\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}} = \mp\infty$

AS. OBLIQUO: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} < \infty$
$y = mx+q$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+x+1}{(x^2+3x)x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$

$q = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = 6$

$y = -2x+6$

11) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+7}{x^4-2x^3+7} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^4}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$
AS. ORIZZONTALE
$y=0$

12) $\lim_{x\to\pm\infty} x+\sqrt{9x^2+5x} = x+|x|\sqrt{9+\underbrace{\frac{5}{x}}_{0}} = 9+|x|3 = +\infty$

13) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = -\frac{1}{+\infty} = 0^-$

23) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(1+1-\cos x)}{\sin x \, \sin x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{1}{2}$

26) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (e^{\cos x}-1)\,tg x = 0 \cdot \pm\infty \qquad t=\cos x$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (e^{t}_{t}-1)\,tg x = t\,tg x = \cos x\, tg x = \cancel{\cos x}\,\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} = 1$

28) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-3x^2+\sin 2x}{2e^x+x^3-2} \cdot \frac{2x}{2x} = \frac{(\sqrt{x}-3x^2)2x}{2e^x+x^3-2} = \frac{(\sqrt{x}+3x^2)\,2x}{2(e^x-1)+x^3} \cdot \frac{x}{x} = \frac{(\sqrt{x}+3x^2)\,2\cancel{x}}{(2+x^3)\cancel{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

29) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}-3x^2+\sin 2x}{2e^x+x^3-2} = \frac{-3x^2}{2e^x} + \frac{\sin 2x}{2e^x} = \frac{1}{\underset{0}{2e^x}} + \frac{1}{\underset{0}{2e^x}} = 0$

35) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\cos x}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{x}{x} = \frac{2x}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2x(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{2\cancel{x}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x}(1-\underset{0}{\frac{1}{x}})} = +\infty$

42) $f(x) = \begin{cases} \frac{tg x}{x}+3 & x>0 \\ (x-1)^2+\alpha & x\le 0 \end{cases}$

$D_f = \begin{matrix} x\neq 0 \\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{tg x}{x}+3 = 4$

$1+\alpha=4$

$\lim_{x\to 0^-} (x-1)^2+\alpha = 1+\alpha = f(0) \qquad \alpha=3$

43) $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(x+1)}{x} & \text{se } -1<x<0 \\ \frac{e^x-1}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$

$D_f = \begin{matrix} x\neq 0 \\ x>-1 \end{matrix}$ non può essere continua nel dominio

$\lim_{x\to -1^+} \frac{\log(x+1)}{x} = +\infty$ ASINTOTO VERTICALE DESTRO $x=-1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-1}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$ PUNTO DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

SEGNO: $\log(x+1) \quad x+1>1 \quad x>0 \qquad e^x-1>0 \quad x>0 \qquad x>0$

16)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{x+1} & x\geq 0\\ 1+e^{ax} & x<0\end{cases}$$

$$Df: \begin{cases} x\neq -1 & x>0 \quad \text{sempre}\\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$Df=\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^-} 1+e^{ax}=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x+1}=\frac{b}{1} \qquad b=2 \to \text{per essere continua}$$

DERIVABILE

$$\lim_{x\to 0^-} f'_-(x_0)=\lim_{x\to 0^+} f'_+(x_0)$$

$$f'_-(x)=ae^{ax}$$

$$f'_+(x)=b(x+1)^{-1}=\frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} ae^{ax}=a=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{(x+1)^2}=-2 \qquad a=-2 \to \text{per essere derivabile}$$

17) eq. retta tangente in $x_0=3$ e $f(x)=\sqrt{x^2+16}$

$$t(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x_0)=\sqrt{9+16}=5$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{2}(x^2+16)^{-\frac{1}{2}}2x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=\frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{2}\sqrt{9+16}}=\frac{3}{5}$$

$$t(x)=5+\frac{3}{5}(x-3)=5+\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}=\frac{3}{5}x+\frac{16}{5}$$

18) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ $\qquad y=\ln(x^2+3)$

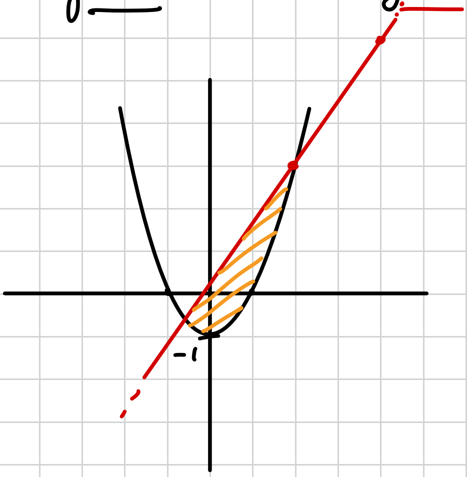
$$y=\ln(x^2+3)\,dx$$

$$\int\frac{x}{x^2+3}\,dx=\int\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}\int 1\,dy=$$

$$\frac{1}{2}y+c=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+c$$

$$dy=\frac{2x}{x^2+3}\,dx \qquad \frac{dy}{2}=\frac{x}{x^2+3}\,dx$$

19) $f(x) = x^2-1$ $\quad g(x) = \frac{3}{2}x$ $\quad [0;2]$



$$\int_0^2 \frac{3}{2}x - x^2+1 \; dx$$

$$\left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 =$$

$$\left(\frac{3\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}} - \frac{8}{3} + 2 \right) - \left(\frac{0}{4} - \frac{0}{3} + 0 \right) =$$

$$3 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{15-8}{3} = \frac{7}{3}$$

20: $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{7x}-1}{4x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ F.I.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{7x}}{4x} \overset{\partial H}{=} \frac{7e^{7x}}{4} = \frac{7}{4}$$

DERIVATE

20-11-2024

DERIVATE

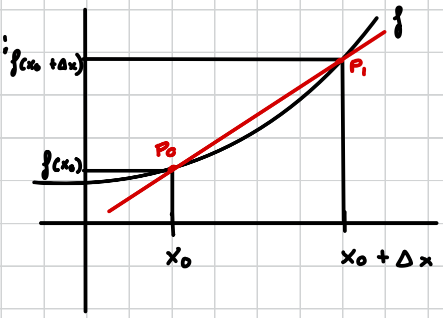
Sia f una funzione e $x_0 \in D_f$. Supponiamo che f sia definita in $I_r(x_0)$

DEF: Dato $x \in I_r(x_0)$; $x \in D_f$ si definisce

$\Delta x = x - x_0 \rightarrow x = x_0 + \Delta x$ e $\Delta f = f(x) - f(x_0) \longrightarrow f(x) = f(x_0) + \Delta f$
il corrispondente incremento della variabile y.

Il quoziente: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\rightarrow$ RAPPORTO INCREMENTALE della fz f tra x e x_0

OSS:



$s(x) = f(x_0) + \dfrac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0)$

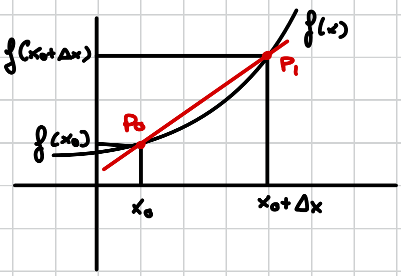
retta secante f e che passa per $P_0 = (x_0 ; f(x_0))$ e $P_1 = (x_0 + \Delta x ; f(x_0 + \Delta x))$

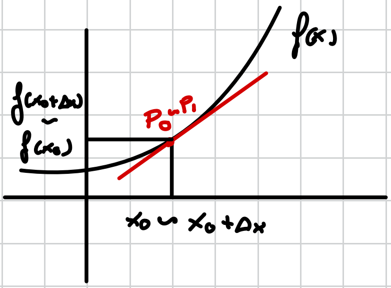
$\rightarrow$ Cosa succede se Δx tende a 0 ? $\Longleftrightarrow x \rightarrow x_0$

DEF: Sia f una funzione definita in $I_r(x_0)$, con $x_0 \in D_f$. f è DERIVABILE in x_0 se esiste il limite del rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ se $x \rightarrow x_0$. In particolare tale limite è la derivata della funzione.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

NOTAZIONI: $f'(x_0) = \dfrac{d}{dx} f(x_0) = Df(x_0)$





Se $\Delta x \rightarrow 0$ P_0 e P_1 si avvicinano fino a che non sarà + secante ma tangente

OSS: se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0, non vale viceversa

$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

OSS: La $f'(x)$ è detta derivata prima di f. In particolare $Df' \subseteq Df$

La derivata di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente a f in x_0

DEF: sia f definita in un intorno destro di x_0 allora f è derivabile se e solo se esiste finito: $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ il valore del limite è detto DERIVATA DESTRA DI f in x_0

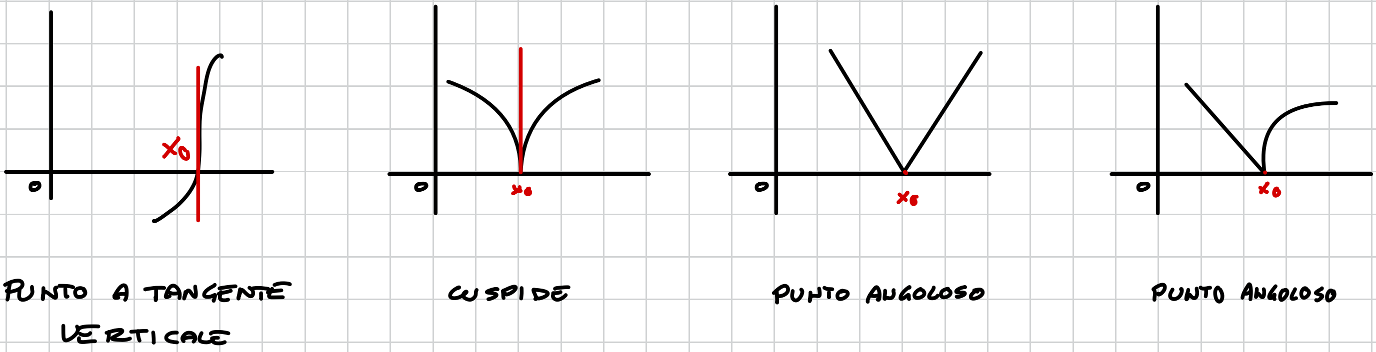
lo stesso a sinistra.

TEO: una funzione f è derivabile in un punto x_0 appartenente al suo dominio se e solo se: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ in questo caso posso dire $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

se le derivate non sono uguali abbiamo i PUNTI DI NON DERIVABILITÀ:

1) PUNTO ANGOLOSO: se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono ma sono diverse
2) PUNTO A TANGENTE VERTICALE: se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono infinite ma di segno concorde
3) CUSPIDE: se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono infiniti ma segni discordi.

Es:



ALGEBRA DELLE DERIVATE:

1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ $\quad g(x_0) \neq 0$

4) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$ con α e $\beta \in \mathbb{R}$

5) $(f \circ g)'(x_0) = \underset{y_0 = f(x_0)}{g'(y_0)} f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$

6) $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

OSS: tutte le regole valgono $\times$ la derivazione indefinita, ovvero in un generico punto x.

DERIVATE FUNZIONI ELEMENTARI:

1) $D\, x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$ $\quad f'(x^2) = 2x$

2) $D \operatorname{sen} x = \cos x$

3) $D \cos x = -\operatorname{sen} x$

4) $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$

5) $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

8) $D\, a^x = \ln a \cdot a^x$

9) $D\, e^x = e^x$

10) $D \log_a |x| = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}, \; x \neq 0$

11) $D \ln x = 1/x$

Esercizi:

1) $f(x) = \operatorname{sen} x + x^3 + 4e^x$

$f'(x) = \cos x + 3x^2 + 4e^x$

2) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{\cos x \cdot x^2 - \operatorname{sen} x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x}{x^4}$

3) $f(x_0 = 1) = \frac{\cos x}{e^x}$

$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x\, e^x - \cos x\, e^x}{(e^x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} 1 \cdot e - \cos 1 \cdot e}{e^2}$

4) $f(x) = e^{2x^2}$

$f'(x) = e^{2x^2} \cdot 4x$

5) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

$f'(x) = \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}$

6) $f(x) = 3x \sqrt[3]{1+x^2}$

$f'(x) = 3\sqrt[3]{1+x^2} + 3x \frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} =$

$3\sqrt[3]{1+x^2} + x \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \cdot 2x$

7) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot e^{x^2}$

$f'(x) = \cos x\, e^{x^2} + \operatorname{sen} x\, e^{x^2} \cdot 2x$

8) $f(x) = \ln |\operatorname{sen} x|$

$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$ se $\operatorname{sen} x > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot -\cos x$ se $\operatorname{sen} x < 0$

$= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cos x$

9) $f(x) = \cos(e^{x^2+1})$

$f'(x) = -\operatorname{sen}(e^{x^2+1}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

10) $f(x) = (x \ln x)^{-1}$

$f'(x) = -(x \ln x)^{-2} \cdot (1 \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}}) = -\frac{1}{(x \ln x)^2} \cdot (\ln x + 1)$

Es: scrivere la retta tangente nei punti diretti delle funzioni

$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ → eq. retta passante (tangente) in quel punto

1) $f(x) = \ln(3x-2)$ in $x_0 = 2$

$\ln 4 + \frac{1}{3x-2} \cdot 3 = \ln 4 \cdot \frac{3}{4}(x-2)$

2) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $\quad x_0 = 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1(1+x^2) - x\,2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \; \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2} = \frac{1+0(x-1)}{2} = \frac{1}{2}$

3) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$ $\quad x_0 = 0$

$f'(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} = e^{\sqrt{2x+1}}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$e + e(x-0) = ex + e$

4) $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $\quad x_0 = \frac{1}{\pi}$

$f(x_0) = \operatorname{sen}\pi = 0$

$f'(x) = \cos(\pi^{-1}) \cdot -x^{-2} = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} =$

$-\cos\pi \cdot \pi^2 = +\pi^2$

$t(x) = 0 + \pi^2\left(x - \frac{1}{\pi}\right) = \pi^2 x - \pi$

5) $f(x)\ 5x + x^3 + 2x^5$ $\quad X_0 = 0$

a) verifica che $f(x)$ sia invertibile su $\mathbb{R}$
b) calcola $(f^{-1})'(0)$

a) $f(-x) = 5(-x) + (-x)^3 + 2(-x)^5$ NO PARI
$-f(x) = -(5x + x^3 + 2x^5)$ DISPARI OK!

b) $(f^{-1}(x))'$ $\quad f(x) = 5x + x^3 + 2x^5$ $\quad x_0 = 0$

$5x_0 + x_0^3 + 2x_0^5 = 0$

$x_0 = 0$

$(f^{-1}(0))' = \frac{1}{5 + 3x^2 + 10x^4} = \frac{1}{5}$

1) $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) = \sqrt{x+1} + x \qquad x = 3$

$f(x_0) = 2+3 = 5$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 + 1 \qquad f'(x_0) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

$z = 5 + \frac{5}{4}(x-3) = \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$

2)

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & -2 \le x \le 0 \\ 2\sqrt{x} + 1 & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} & x > 1 \end{cases}$$

- è continua in $x = 0$ e $x = 1$?
- derivabile in $x = 1$

1) $\lim_{x \to 0^-} \ln(x+2) = \ln 2$

$\lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{x} + 1 = 1$

no continua in $x = 0$
I specie

2) $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} = \cancel{\frac{6}{2}}\ 3$

$\lim_{x \to 1^-} 2\sqrt{x} + 1 = 3$

continua in $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & -2 \le x \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \le 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

$\lim_{x \to 1^+} x = 1$

è derivabile in $x = 1$

Es:

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen} 2x - 4 & \text{se} \quad x < 0 \\ b(x-1) + e^x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Determina i valori di a e b affinché $f(x)$ derivabile in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} a \operatorname{sen} 2x - 4 = -4$$

$$\lim_{x \to 0^+} b(x-1) + e^x = -b + 1$$

$-b+1 = -4$

$-b = -5 \quad b = 5 \longrightarrow$ continua se $b = 5$

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen} 2x - 4 & \text{se} \quad x < 0 \\ 5(x-1) + e^x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2a \cos 2x \\ 5 + e^x \end{cases}$$

$$f'_-(0) = f'_+(0)$$

$2a \cos 2 \cdot 0 = 5 + e^0$

$2a = 6 \quad a = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 3 \operatorname{sen} 2x - 4 & \text{se} \quad x < 0 \\ 5(x-1) + e^x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

27-11-2024

PUNTI DI ESTREMO E PUNTI CRITICI DI UNA FUNZIONE

DEF: sia $x_0 \in D_f$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO RELATIVO O LOCALE se $\forall x \in I_{x_0} \cap D_f \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

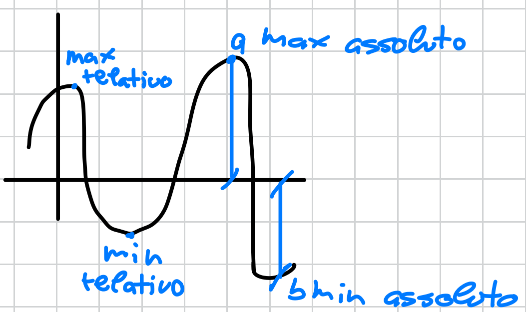
Il valore di $f(x_0)$ è detto MASSIMO RELATIVO DI f.

DEF: si dice che x_0 è di MASSIMO ASSOLUTO se $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

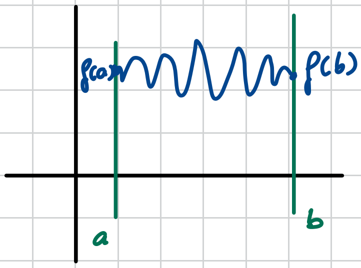
OSS: in entrambi i casi il massimo è stretto se $f(x) < f(x_0)$

OSS: la definizione di punto di minimo assoluto è uguale ma $f(x) \geq f(x_0)$

OSS: i punti di massimo e minimo sono detti punti di ESTREMO di $f(x)$



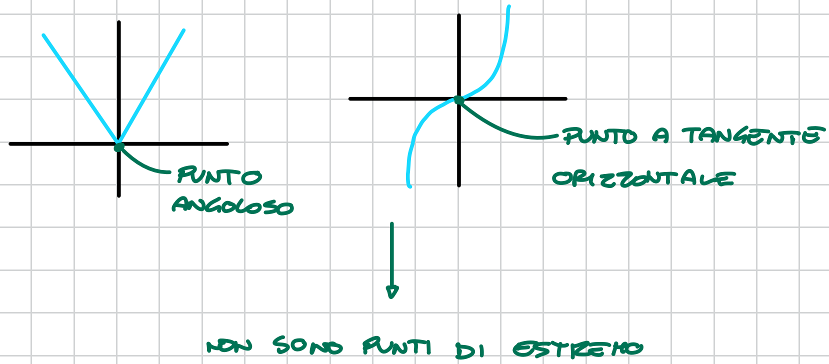
TEO: sia f una funzione continua su un I chiuso e limitato $[a;b] \Rightarrow f$ è limitata in $[a;b]$ e in $[a;b]$ assume massimo o minimo.



DEF: un punto x_0 è detto CRITICO O STAZIONARIO se $f'(x_0)=0$

TEO: i punti di estremo di una f sono punti critici.
punti massimo e minimo hanno derivata nulla.

OSS! non vale la def fra punto di estremo e punto critico.



PUNTI A TANGENTE ORIZZONTALE: Sono punti critici quindi con derivata nulla ma non sono punti di massimo o minimo

TEO: da un intervallo $[a;b]$ se $f(a)=f(b)$ allora $\exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0)=0$

TEO: (Lagrange) sia f una funzione in $[a;b]$ e derivabile almeno in $(a;b)$ allora $\exists$ almeno un $x_0 \in (a;b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$

$\downarrow$

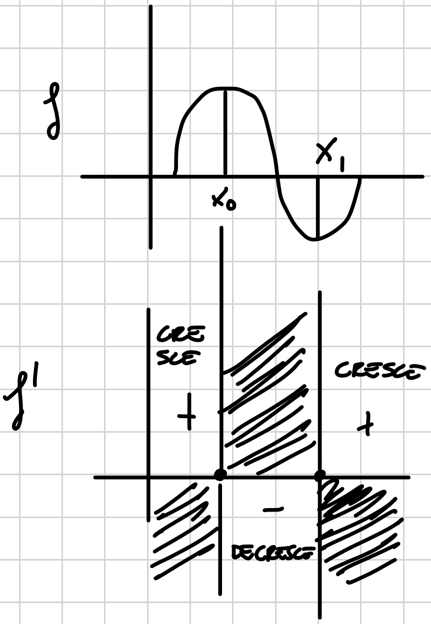
valor medio di f

INTERVALLI DI MONOTONIA:

DEF! Sia I e f una funzione derivabile su $I \Rightarrow$

- f è CRESCENTE su I se $f'(x)>0, \forall x \in I$
- f è DECRESCENTE su I se $f'(x)<0, \forall x \in I$

- se $f'(x)>0$ a sinistra di x_0 e $f'(x)<0$ a destra di x_0 allora x_0 è un PUNTO DI MASSIMO
- se $f'(x)<0$ a sx di x_0 e $f'(x)>0$ a dx di x_0 allora x_0 è un PUNTO DI MINIMO
- se $f'(x)=0$ e f' non cambia segno è un PUNTO DI FLESSO (a tg orizz.)



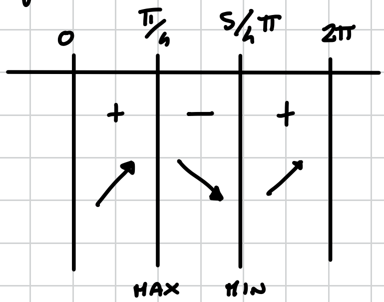
ES! max e min

1) $f(x) = \operatorname{sen}x + \cos x \qquad [0; 2\pi]$

$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen}x$

$f'(0) = 0 \qquad \cos x = \operatorname{sen}x \qquad x_1 = \frac{\pi}{4} \qquad x_2 = \frac{5}{4}\pi$

$f'(x) > 0$



$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$

ES! min e max

$f(x) = x^2 - |x+1| - 2 \qquad [-2; 1]$

$f(x) = 0 \qquad x^2 - |x+1| - 2 = 0 \qquad x^2 + x + 1 - 2 = 0$

$x^2 - x - 1 - 2 = 0 \qquad x^2 + x - 1 = 0$

$x^2 - x - 3 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 3 & x \geq -1 \\ x^2 + x - 1 & x < -1 \end{cases}$$

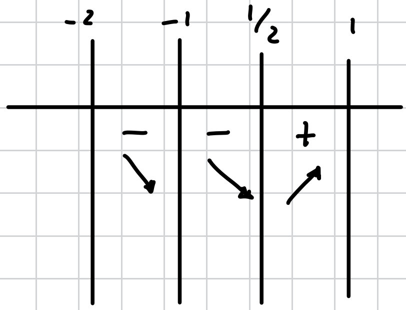
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 = 0 & x \geq -1 \\ 2x + 1 = 0 & x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} & x \geq -1 \\ x = -\frac{1}{2} & x < -1 \end{cases}$$ no xché $-\frac{1}{2}$ non è < -1

$f'(x) > 0$

$2x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{2}$



$x = \frac{1}{2}$ MIN

Es: $f(x) = xe^{2x}$

$$f'(x) = \cancel{x}e^{2x} + xe^{2x}\cdot 2 = e^{2x}(2x+1)$$

$$e^{2x}(2x+1) = 0 \qquad \cancel{2}x = -\frac{1}{2}$$

		$-\frac{1}{2}$	
e^{2x}	+		+
$2x+1$	−		+
	−		+
	↘		↗

$x = -\frac{1}{2}$ MIN

→ PONGO LA FUNZIONE ≥ 0 PER TROVARE

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2e} \quad \text{MINIMO}$$

DERIVATE DI ORDINI MAGGIORI:

$$f''(x_0) = (f'(x_0))' = (f')'(x_0)$$ DERIVATA SECONDA di x_0

DEF: la f derivata seconda associa ad ogni punto $x \in D_f$ il valore $f''(x)$ dove questo esiste.

DEF: la derivata k-esima di f è la divata prima della derivata di ordine precedente.

$$f^{k}(x) = (f^{k-1})'(x) \qquad \text{oss: } f^{(0)} = f$$

DEF: una funz. si dice di classe C^k ($k \geq 0$) su I se derivabile k volte su quell'intervallo. se $k = \infty$ la fun. è di classe C^∞

Es: e^x, $\operatorname{sen}x$, $\cos x$, polinomio

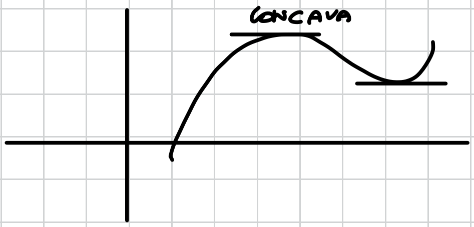
CONCAVITÀ E FLESSI:

DEF: una funz. f è convessa in $x_0 \in D_f$:

$$\forall x \in I_+(x_0) \Rightarrow f'(x_0) \geq t(x) = \underline{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$ retta tangente

una funz. f è concava in $x_0 \in D_f$ se esiste un I_{x_0}:

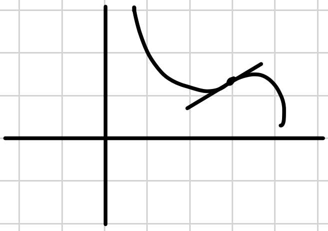
$$\forall x \in I_+(x_0) \Rightarrow f(x) \leq t(x)$$



DEF: un punto $x_0 \in D_f$ si dice PUNTO DI FLESSO OBLIQUO

- ASCENDENTE se $x < x_0$ $f(x) \leq t(x)$ CONCAVA; $x > x_0$ $f(x) \geq t(x)$ CONVESSA
- DISCENDENTE $x < x_0$ $f(x) \geq t(x)$; $x > x_0$ $f(x) \leq t(x)$

ASENDENTE



DISCENDENTE

TEO: sia I e f una funz. definita in I allora:

- f CONVESSA su $I \iff f'$ CRESCENTE su $I \Rightarrow f'' > 0$ su I
- f CONCAVA su $I \iff f'$ DECRESCENTE su $I \Rightarrow f'' < 0$ su I

TEO: si f una funz. derivabile 2 volte in $I_r(x_0)$

x_0 è un PUNTO DI FLESSO OBLIQUO se e solo se $f''(x_0) = 0$

se $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ se $f''(x) < 0$ a sx di x_0 e $f''(x) > 0$ a dx di x_0 allora x_0 è un flesso ascendente

se $f''(x) > 0$ a sx di x_0 e $f''(x) < 0$ a dx di $x_0 \Rightarrow x_0$ è un flesso discendente

se $f''(x)$ non cambia segno $\Rightarrow x_0$ non è un flesso

Es: $f(x) = xe^{2x}$

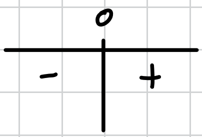
1) $D_f = \mathbb{R}$

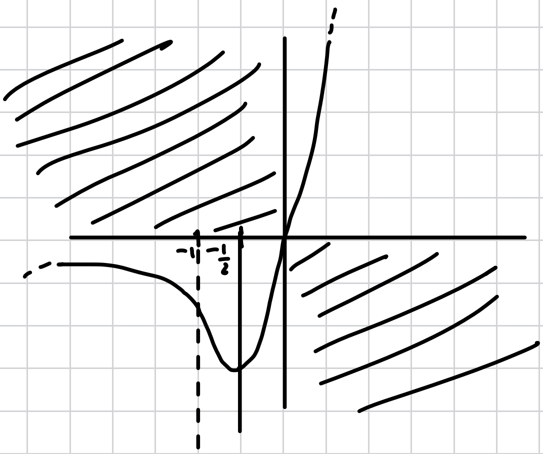
2) segno e zeri:

$xe^{2x} = 0$

$x = 0$

$x > 0$





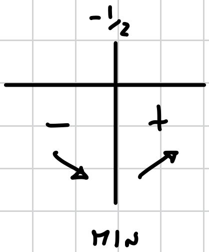
3) LIMITI

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{2x} = \frac{x}{e^{-2x}} = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{2x} = +\infty$$

4) DERIVATE

$f'(x) = (2x+1)e^{2x}$



5) CONVESSITÀ

$$f''(x) = 2e^{2x} + (2x+1)2e^{2x}$$

$$2e^{2x}(1+2x+1) = 2e^{2x}(2+2x)$$

$$2e^{2x}(2+2x) > 0$$

$$2x > -2 \qquad x > -1$$

		-1	
$2e^{2x}$	+		+
$2+2x$	−		+
	−		+
	$\cap$		$\cup$

<u>TEO</u>: DE L'HOPITAL (usate poco 🙂)

Siano f e g due funt. definite in un $I(x_0)$ con x_0 finito o infinito e tali che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$$

se f e g sono derivabili in $I_r(x_0)$ e $g'(x_0) \neq 0$ e inoltre esiste finito:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g(x)} \quad \text{allora:} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$$

se inoltre il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$ è ancora F.I.:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''}{g''} = \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}$$

Es:

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\text{sen}\, 5x} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} + 2e^{2x}}{5\cos 5x} = \frac{4}{5}$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x+3)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x+3} e^x = \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1+\frac{3}{e^x})} = 1$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\text{sen}^2 x} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2}x}{(1+x^2)\cancel{2}\,\text{sen}x\cos x} = = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\text{sen}x\cos x} = 1$$

1

ESERCITAZIONE DERIVATE

ESERCITAZIONE DERIVATE 9-12-2024

1) RETTA TG a $f(x)$ in x_0

a) $f(x) = 2x + \ln x \qquad x_0 = e$

b) $f(x) = e^{-x^2} \qquad x_0 = 0$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = t(x)$$

a) $f(x_0) = 2e + 1$

$f'(x_0) = 2 + \frac{1}{x} = 2 + e^{-1}$

$t(x) = 2e+1 + (2+e^{-1})(x-e) =$

$\cancel{2e} + 1 + 2x \cancel{- 2e} + \frac{x}{e} - 1 =$

$2 + \frac{x}{e} - 1 = t(x)$

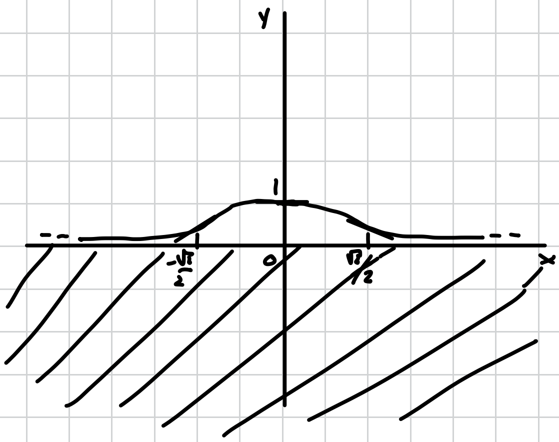
b) $f(x_0) = 1$

$f'(x_0) = e^{-x^2}(-2x) = 0$

$t(x) = 1$ punto stazionario
tg. oriz.

2) STUDIO DI FUNZIONE

$f(x) = e^{-x^2}$



a) $D_f = \mathbb{R} \quad (-\infty; +\infty)$

b) segno e zeri:

non ci sono zeri
è sempre + xché è un esponenziale

c) PARI o DISPARI:

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}$ PARI

d) LIMITI:

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$

e) DERIVATE:

$f'(x) = (-2x)e^{-x^2} \qquad f'(x) = 0 \qquad x = 0 \to$ PUNTO CRITICO

$f(0) = 1$ PUNTO a tg ORIZ
max o min o flesso

$f'(x) > 0 \qquad (-2x)e^{-x^2} > 0$

		0	
$-2x$	$+$		$-$
e^{-x^2}	$+$		$+$
	$+$ ↗		$-$ ↘

MAX $x=0$

	$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	
$+$ ∪		$-$ ∩		$+$ ∪
	FLESSO		FLESSO	

A tg obliqua xchè sempre crescente

$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2) + e^{-x^2}(-2) =$

$f''(x) > 0$

$\cancel{e^{-x^2}}(4x^2) + \cancel{e^{-x^2}}(-2) > 0$

$4x^2 - 2 > 0$

$\cancel{4}x^2 > \frac{2}{4}$ $\qquad x^2 > \frac{1}{2}$

$x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \cup x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

3A) CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

1) $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \cos\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$

CONTINUITÀ:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} \cos\sqrt{-x} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} \cos\sqrt{x} = 1$ $\qquad 1 = 1$ è continua

DERIVABILITÀ:

$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen}\sqrt{x}\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & x \geq 0 \\ +\operatorname{sen}\sqrt{-x}\ \left(\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}}\right) & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = $ F.I. $\qquad \lim_{x\to 0^-} +\operatorname{sen}\sqrt{x}\ \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{-x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = $ $\qquad \lim_{x\to 0^+} -\operatorname{sen}\sqrt{x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ NON DERIVABILE PUNTO DI NON DERIVABILITÀ PUNTO ANGOLOSO

4) PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

a) $f(x) = |x^3 - x^2|$

$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & x \geq 1 \\ -x^3 + x^2 & x < 1 \end{cases}$ $\qquad$ Prima della derivabilità verifico se è continua

$x^3 - x^2 > 0$

$x^2(x-1) > 0$

		1	
x^2	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$+$

1) $\lim_{1^-} f(x) = 0$

$\lim_{1^+} f(x) = 0$

2) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & x \geq 1 \\ -3x^2 + 2x & x < 1 \end{cases}$

$\lim_{1^+} f'(x) = 1$

$\lim_{1^-} f'(x) = -1$ NON DERI. PUNTO ANGOLOSO

$g(x) = \sqrt[5]{x}$

1) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 0$

2) $g'(x) = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ $D g' = x \neq 0$

$x = 0$ PUNTO DI NON DERIVABILITÀ

$\lim_{x \to 0^-} g'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} g'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

FLESSO A TG. VERTICALE

5) $f(x) = \begin{cases} x(\beta - \log x^\alpha) & x > 1 \\ \text{sen}(\text{sen}(x-1)) & x \leq 1 \end{cases}$

TROVARE α e β TC $f(x)$ derivabile su $\mathbb{R}$

1) LIMITI $f(x)$

$\lim_{x \to 1^-} \text{sen}(\text{sen}(x-1)) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} x(\beta - \log x^\alpha) = \beta$ $\beta = 0$ per essere continua

2) DERIVABILITÀ

$f'(x) = \begin{cases} (\beta - \ln x^\alpha) + x(-\frac{1}{\cancel{x^\alpha}} \alpha \cancel{x^{\alpha-1}}) = -\log x^\alpha - \alpha & x > 1 \\ \cos(\text{sen}(x-1)) \cos(x-1) \cdot 1 & x \leq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^+} -\log x^\alpha - \alpha = -\alpha \log 1 - \alpha = -\alpha$

$\lim_{x \to 1^-} \cos(\text{sen}(x-1)) \cos(x-1) = 1 \cdot 1 = 1$

$\alpha = -1$ Derivabile $\times$ $\alpha = -1$

6) $f(x)$ definita in un $I(1)$

$f'(1) = 2$ $g'(\pi) = ?$

$g(x) = f(2\,\text{sen}x - \cos x)$

$g'(x) = f'(h(x))\, h'(x)$

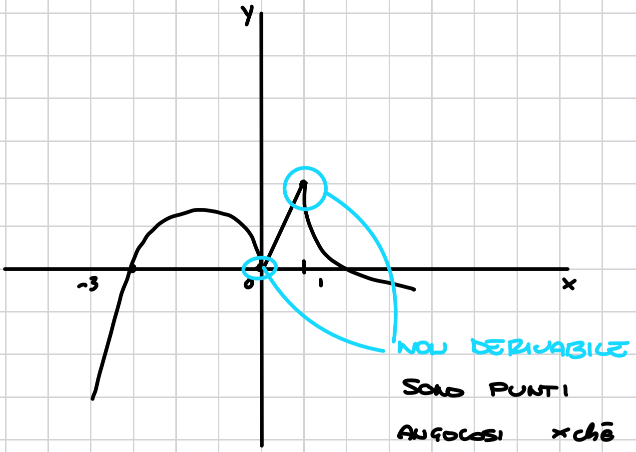
$g'(\pi)\ f'(h(\pi))\, h'(\pi)$

$h'(x) = 2\cos x + \text{sen}x$

$h'(\pi) = -2$ $g'(\pi) = 2\ (-2) = -4$

7) $f(x) = \begin{cases} -x^2-3x & x \le 0 \\ 2x & 0 < 0 \le 1 \\ 2-\sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$

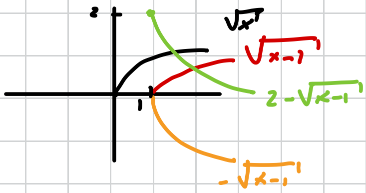
grafico qualitativo e definire se è derivabile su Df.



$Df = \mathbb{R}$

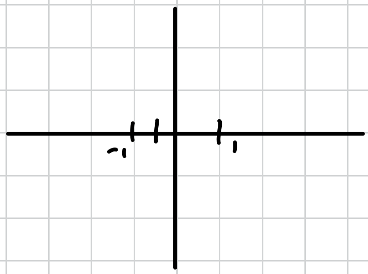
$-x(x+3) = 0$

$2-\sqrt{x-1}$



8) $f(x) = |x| + \sqrt[3]{x}$

MAX e MIN $I = [-1; 1]$



- ESTREMI DOMINIO
- PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} & x \ge 0 \\ -x + \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^{-2/3} = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x \ge 0 \\ -1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x < 0 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \quad x \ge 0 \quad \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = -3$ IMPOSSIBILE

$x < 0 \quad -1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{9}$

$-\frac{\sqrt{3}}{9} > 0 \qquad \frac{\sqrt{3}}{9} < 0$

10) INVERTIBILE ?

SIMMETRIE NO PARI NO DISPARI

$(y^{-1})'(y_0) \qquad y_0 = 1$

$(f^{-1})'(y_0) \quad y_0 = 1$

$x_0 = f^{-1}(y_0)$

INTEGRALI

11-12-2026

INTEGRALI

INTEGRALI INDEFINITI:

DEF: sia f definita in $I \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ ogni funzione $F(x)$ derivabile in I è tc $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$ è detta PRIMITIVA o ANTIDERIVATA di f in I.
Se esiste F allora f si dice INTEGRABILE in I.

OSS: se F e G sono 2 primitive di $f(x)$ su I allora:
$G(x) = F(x) + c$, $\forall x \in I$ e $\forall c \in \mathbb{R}$

DIM: $F'(x) = f(x)$
$G'(x) = (F(x)+c)' = F'(x) + c' = f(x)$

sia f una funzione INTEGRABILE in I allora tutte le sue primitive sono del tipo $F(x)+c$, ovvero traslazioni verticali di $F(x)$.

NOTAZIONE: le primitive di una funzione f si indicano:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$\Updownarrow$$
$$F'(x) = f(x)$$

INTEGRALI FUNZIONI ELEMENTARI:

1) $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1$

2) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \qquad x \neq 0$

3) $\int e^x\,dx = e^x + c$

4) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$

5) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$

6) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

7) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

ES: CALCOLA INTEGRALI

1) $\int 1\,dx = x + c$

2) $\int \sqrt{x}\,dx = \int (x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$

3) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + c$

REGOLE DI INTEGRAZIONE:

1) **LINEARITÀ**: Siano f e g due funz. integrabili in I e siano α e $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

ES: $\int (3e^x + 7\cos x)dx = 3\int e^x dx + 7\int \cos x\, dx =$

$3e^x + c_1 + 7\operatorname{sen} x + c_2 = 3e^x + 7\operatorname{sen} x + c$

2) **INTEGRAZIONE PER PARTI**: siano f e g funzioni integrabili in I: se la funzione $f' \cdot g$ è integrabile allora lo è anche $f \cdot g'$:

$$\int f' \cdot g\, dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\, dx$$

$$\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx$$

ES: $\int 1 \cdot \ln x\, dx = x\ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dx = x\ln x - x + c$

$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$

$g = x \quad g' = 1$

Es: $\int x e^x\, dx = xe^x - \int 1e^x\, dx = xe^x - e^x + c$

$f = x \quad f' = 1$

$g = e^x \quad g' = e^x$

ES: $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\, e^x + \int e^x(\cos x)\, dx = -e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

$f = e^x \quad f' = e^x$

$g = -\cos x \quad g' = \operatorname{sen} x$

$f = e^x \quad f' = e^x$

$g = \operatorname{sen} x \quad g' = \cos x$

$= \cancel{2}\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \dfrac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + c$

3) **INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE**: sia $f(z)$ una funzione integrabile su $J \subseteq \mathbb{R}$ sia poi $\varphi(x)$ una funzione definita e derivabile su $I \subseteq \mathbb{R}$ e $\varphi(x)$ prende valori in J: $\int f(z)\, dz = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = F(f(x)) + c$

OSS: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(z)\,dz = F(z)+c = F(\varphi(x))+c$$

ES: $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \int \frac{4}{4}\cdot\frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x^4+1|+c$

ES: $\int tg x\,dx = \int \frac{sen x}{cos x}\,dx = -\ln|cos x|+c$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+c$$

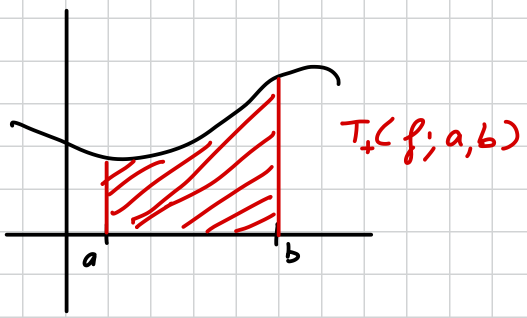
ES: $\int e^{x^2}\cdot x\,dx = \int e^{x^2}\frac{1}{2}2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+c$

ES: $\int x^2\,sen(x^3+1)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3+1)+c$

ES: $\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}+c$

CALCOLO AREE / INTEGRAZIONE DEFINITA:

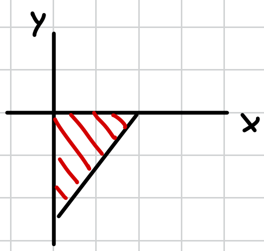
DEF: sia f una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato. $I=[a;b]$. Sia f delimitata su I. Si definisce TRAPEZOIDE di f su I, $T(f;a,b)$, l'area delle parallele all'asse y e passanti per a e b e dal grafico di f.



$A(T(f;a;b))$ con segno $= T_+ - T_-$

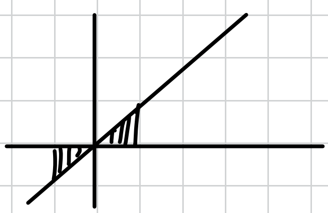
$A(T(f;a;b))$ senza segno $= T_+ + T_-$

Es:



A con segno è $-$
senza " è $+$

Es:



con segno $=0$
senza " $= -$

DEF: l'area del trapezoide con segno : $\int_a^b f(x)\,dx$

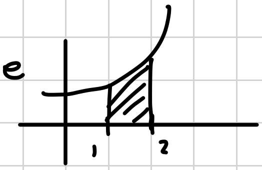
l'area del trapezoide senza segno : $\int_a^b |f(x)|\,dx$

OSS: negli integrali definiti non si usa la costante c.

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: sia f continua e limitata in $I=[a;b]$ sia F una sua primitiva :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b$$

Es: $\int_1^2 e^x\,dx = e^2 - e$

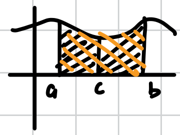


Es: $\int_{-1}^0 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 = 0-\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

- ALGEBRA e REGOLE :

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ADDITIVITÀ



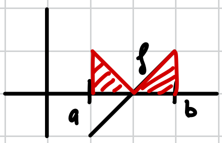
2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4) $\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$ LINEARITÀ

5) $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \iff f(x)\geq 0$ su TUTTO $[a;b]$ POSITIVITÀ

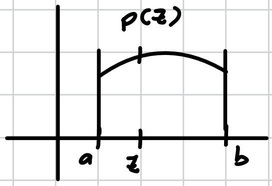
6) $f(x)\leq g(x)$ su $[a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ CONFRONTO

7) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$



DIM: $\left|\int_{-1}^1 x\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2}\right]\right|_{-1}^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$

8) MEDIA INTEGRALE: $f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = m(f;a;b)$ VALOR MEDIO



SIMMETRIA: SIA f integrabile in $[-a;a]$ allora:

1) f PARI: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_a^0 f(x)\,dx$

f DISPARI: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Es: $f = x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

Esercizi:

1) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = \underset{-(-1)}{-\cos\pi} + \underset{+\ 1}{\cos 0} = 2$

2) $\int_1^7 \left(2x - \frac{x^2}{10}\right)dx = \left[\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{x^3}{30}\right]_1^7 = \left(49 - \frac{7^3}{30}\right) - \left(1 - \frac{1}{30}\right) = \frac{183}{5}$

3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos(-\frac{\pi}{2})) = -1 + 0$

OSS: Per l'integrazione definita valgono tutte le regole dell' int. indefinita. In particolare vale l'integrazione per parti:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x) = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx =$$

$$[f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)] - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

La SOSTITUZIONE: $\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,dz = [F(z)]_{\varphi(b)}^{\varphi(a)}$

Es: $\int_1^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2)$

16-12-2024

Es: $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{4/3}}\,dx = \int x^{-\frac{4}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + c = \frac{-3}{\sqrt[3]{x}} + c$

Es: $\int \frac{|x|+3x}{2|x|^3}\,dx \Rightarrow f(x) = \frac{|x|+3x}{|x|^3}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3x}{2x^3} & x>0 \\ \frac{-x+3x}{-2x^3} & x<0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\cancel{4}x}{\cancel{2}x^3} = \frac{2}{x^2} & x>0 \\ -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}x^3} = -\frac{1}{x^2} & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \frac{2}{x^2}\,dx & x>0 = \frac{2x^{-1}}{-1} + c_1 = -\frac{2}{x} + c_1 \\ \int -\frac{1}{x^2}\,dx & x<0 = -\frac{x^{-1}}{-1} + c_2 = \frac{1}{x} + c_2 \end{cases}$$

Es: $\int (\text{sen}x + |\cos x|)\,dx$ prendendo come riferimento $[0; 2\pi]$

$$\begin{cases} \int (\text{sen}x + \cos x)\,dx & x \geq 0 \rightarrow x \in [0; +\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi; 2\pi] \\ \int (\text{sen}x - \cos x)\,dx & x < 0 \rightarrow x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi[\end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos x + \text{sen}x + c_1 & x \in [0; +\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi; 2\pi] \\ -\cos x - \text{sen}x + c_2 & x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi[\end{cases}$$

Determinare la $F(x)$ tc $f(\frac{\pi}{4}) = 0$

$-\cos\frac{\pi}{4} + \text{sen}\frac{\pi}{4} + c_1 = 0$

$-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + c_1 = 0 \quad c_1 = 0$ quando c_1 è $= 0$

Es : $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$

$f = z^2 \qquad y'$

$\downarrow$

$\operatorname{sen} x = y$

$$F(z(y)) + c = \frac{z^3}{3} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$$

Es : $2\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \, dx \qquad \sqrt{x} = y \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f = \operatorname{sen} z$

$$2[F(y) + c] = 2 - \cos y + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

RIPASSO :

	INTERNE	ESTERNE	
$e^{\cos x}$	$\cos x$	e^z	$\longrightarrow \int e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x)\, dx = e^{\cos x} + c$
$(tg x)^{\frac{1}{3}}$	$tg x$	$z^{\frac{1}{3}}$	
$\cos(e^x)$	e^x	$\cos z$	$\longrightarrow \int \cos(e^x) e^x \, dx = \operatorname{sen}(e^x) + c$
$\ln(\operatorname{sen} x)$	$\operatorname{sen} x$	$\ln z$	$\longrightarrow \int \ln(\operatorname{sen} x) \cos x \, dx = \frac{1}{\operatorname{sen} x} + c$
$\sqrt{\ln x}$	$\ln x$	$\sqrt{z}$	
$tg(\ln x)$	$\ln x$	$tg z$	

Es: $\int_1^2 \frac{x+1}{x} \, dx = \int_1^2 \cancel{\frac{x}{x}} + \frac{1}{x} \, dx = \int_1^2 1 + \frac{1}{x} \, dx = [x + \ln x]_1^2 = (2 + \ln 2) - (1 + \ln 1) = 1 + \ln 2$

Es: $\int_{-1}^{1} \ln(|x| + 1) \, dx = \begin{cases} \int \ln(x+1) & x \geq 0 \\ \int \ln(-x+1) & x < 0 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{0} \ln(-x+1)\, dx + \int_0^1 \ln(x+1)\, dx = [x \ln(1-x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -\frac{1}{1-x} \cdot x \, dx =$$

$f = \ln(1-x) \qquad f' = -\frac{1}{1-x}$

$g = x \qquad g' = 1$

$$= + \int_{-1}^{0} \frac{-1+1-x}{1-x} \, dx =$$

$$= + \int_{-1}^{0} \left(\frac{-1}{1-x} + \cancel{\frac{1-x}{1-x}} \right) dx =$$

$$[\ln(1-x)-x]_{-1}^{0} + [\ln(1-x)+x]_{-1}^{0} =$$

$$\ln(1-0)\cdot 0 - \ln(2)(-1) - [\ln(1-x) - \ln(2)+1] =$$

$$\ln 2 - \cancel{\ln(1-x)} + \cancel{\ln 2} - 1 = \ln 2 - 1$$

Es: $\int_{-2}^{1} e^{|x+1|}\, dx$ $\quad x+1 \geq 0 \to x \geq -1$

$$-1\int_{-2}^{+1} (-1) e^{-(x+1)}\, dx + \int_{-2}^{+1} e^{x+1}(1)\, dx = [e^{-x+1}]_{-2}^{-1} + [e^{x+1}]_{-1}^{1} = e^2+e-2$$

TEO: Le funzioni integrabili in modo definito si dicono integrabili secondo Riemann. In particolare, dato un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$ sono integrabili secondo Riemann:

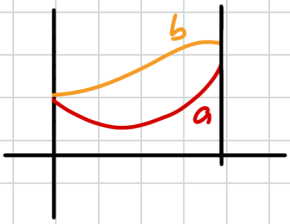
a) Le funzioni continue in $[a;b]$

b) le funzioni continue a tratti su $[a;b]$

c) le funzioni continue su (a,b) e limitate su $[a;b]$

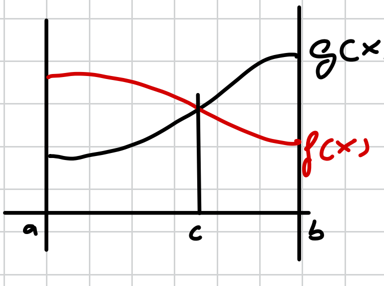
d) le funzioni monotone su $[a;b]$

- INTEGRALI DEFINITI FRA 2 FUNZIONI



$$A = \int_{a}^{b} [b(x) - a(x)]\, dx$$

OSS: la stessa formula vale anche se le 2 funzioni non si intersecano



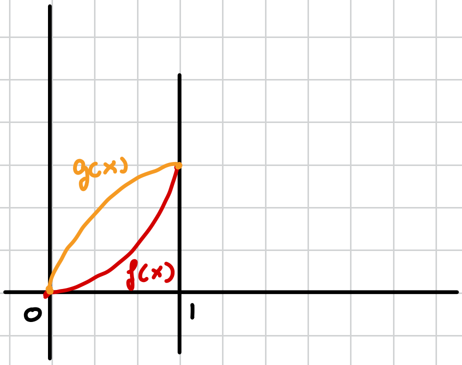
1) TROVARE c ovvero il punto di intersezione in $[a;b]$

2) $A = \int_{a}^{c} f(x) - g(x)\, dx + \int_{c}^{b} g(x) - f(x)\, dx$

$f > g$ $\qquad$ $g > f$

ESEMPI:

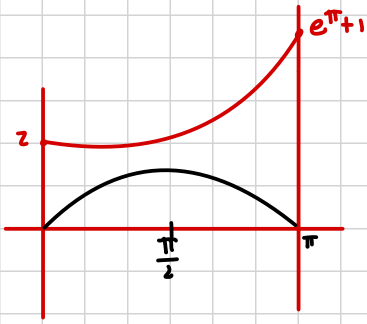
1) $f(x) = x^3$; $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $x \in [0;1]$



$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^3)\, dx =$

$\left[\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

2) $f(x) = e^x + 1$ $g(x) = \operatorname{sen} x$ $[0;\pi]$



$f(x) \geq g(x)$

$A = \int_0^{\pi} (f(x) - g(x))\, dx$

3)

ESERCITAZIONE INTEGRALI

18-12-2024

1) $\int \frac{x^2-4}{x-2}\,dx = \int \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}\,dx = \int x+2\,dx = \frac{x^2}{2}+2x+c$

2) $\int \frac{(x^2-3)(x^2+3)}{x^5}\,dx = \frac{x^4+\cancel{3x^2}-\cancel{3x^2}-9}{x^5} = \int \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^5}} - \frac{9}{x^5}\,dx = \int \frac{1}{x} - 9x^{-5}dx = \ln|x| - 9\,\frac{x^{-4}}{-4} = \ln x + \frac{9}{4x^4} + c$

4) $\int \frac{x}{x-1}\,dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}\,dx = \int\left(\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} + \frac{1}{x-1}\right)dx = x + \ln|x-1| + c$

7) $\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{sen^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}}\,dx = tg x - x + c$

8) $\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}$

$Ax - 2A + B = x + 2$

$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 2 \end{cases} \quad B = 2 + 2A = 4$

$\int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}\right)dx = \ln|x-2| - 4\,\frac{1}{x-2} + c$

13) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \sqrt{2z} + c = \sqrt{2\ln x} + c$

$\log x = z$

$\frac{1}{x}\,dx = dz$

17) $\int x e^{2x^2-1}\,dx = \int e^z \frac{dz}{4} = \frac{1}{4}e^z = \frac{1}{4}e^{2x^2-1}$

$2x^2 - 1 = z$

$4x\,dx = dz$

$x\,dx = \frac{dz}{4}$

21) $\int x^2 \log x\,dx = \frac{x^3}{2}\log x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx = '' - \int \frac{\cancel{x^3}^{\,2}}{3\cancel{x}}\,dx$

$f = \log x \quad f' = \frac{1}{x}$

$g = \frac{x^3}{3} \quad g' = x^2$

$\frac{x^3}{2}\log x - \frac{x^3}{9} + c$

24) $\int x\cosh(3x)\,dx = x\,\frac{\operatorname{senh}(3x)}{3} - \int \frac{1}{3}\operatorname{senh}(3x)\,dx =$

$f = x \quad f' = 1$ $\qquad = -\frac{1}{9}\cosh(3x) + c$

$g = \frac{\operatorname{senh}(3x)}{3} \quad g' = \cosh(3x)$

$3x = dz$

$\cancel{3}dx = \frac{dz}{3}$

29) $\int e^{2x}\cos x\,dx = -\operatorname{sen}x\,e^{2x} - \int 2e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx =$

$f = e^{2x} \quad f' = e^{2x}\cdot 2$ $\qquad - \int 2e^{2x}\cos x\,dx =$

$g = +\operatorname{sen}x \quad g' = \cos x$

$\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\operatorname{sen}x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\,dx$

$= \frac{1}{5}e^{2x}(\operatorname{sen}x + 2\cos x) + c$

DEFINITI

1) $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln|x+1|]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

2) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = x\operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}x\,dx = [x\operatorname{sen}x + \cos x]_0^{\pi/2}$

$= [\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}] - [0 + 1] = \frac{\pi}{2} - 1$

$f = x \quad f' = 1$

$g = \operatorname{sen}x \quad g' = \cos x$

3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}|x|\,dx$

$$\begin{cases} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \operatorname{sen}x\,dx & x \geq 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}-x\,dx & x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} [-\cos x]_{-\pi/2}^{\pi/2} & x \geq 0 \\ [\cos x]_{1}^{1} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} x\,\text{sen}(x^2)\,dx = 0$

DISPARI QUINDI 0

6) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \qquad f(x) = \begin{cases} xe^{x+1} & x<1 \\ \dfrac{e^{1/x}}{x^2} & x\geq 1 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{1} xe^{x+1}dx + \int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = [xe^{x+1}-e^{x+1}]_{-1}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{z}\,dz = [xe^{x+1}-e^{x+1}]_{-1}^{1} + [e^{z}]_{1/2}^{1} =$$

$$2 + e - \sqrt{e}$$

$f = x \quad f' = 1$

$g = e^{x+1} \quad g' = e^{x+1}$

$\frac{1}{x} = z$

$+\frac{1}{x^2}\,dx = -dz$

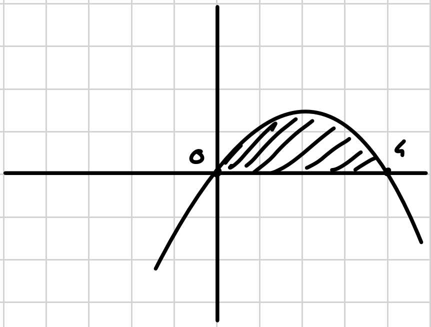
$x=1 \quad z = \frac{1}{x} = 1$

$x=2 \quad z = \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$$xe^{x+1} - \int e^{x+1}\,dx = xe^{x+1} - e^{x+1}$$

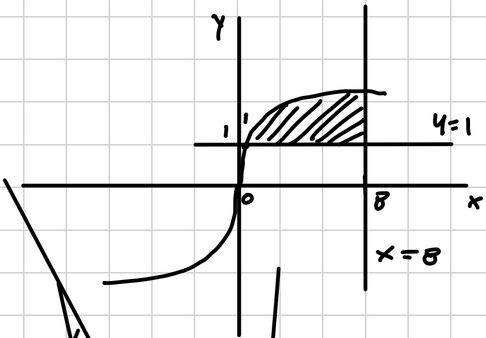
AREA TRA FUNZIONI

1) $f(x) = 4x - x^2$ ASSE ASCISSE (x)



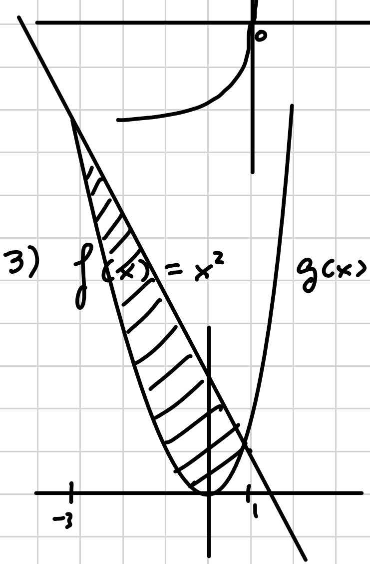
$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 4x - x^2 = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{2}$$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad y=1 \quad$ $y=8$



$$A = \int_1^8 (\sqrt[3]{x} - 1)\,dx = \frac{17}{4}$$

3) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = 3-2x$



$x^2 = 3-2x$

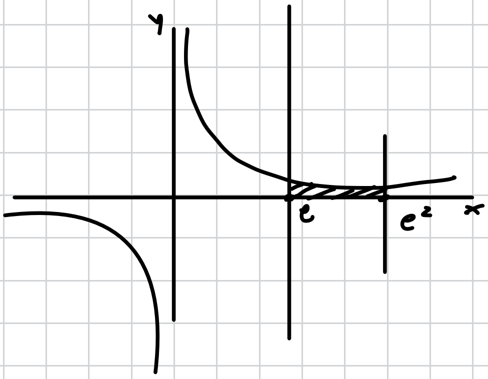
$x^2+2x-3 = 0$

$\Delta = 4-4\cdot1(-3) = 16$

$x_{1,2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

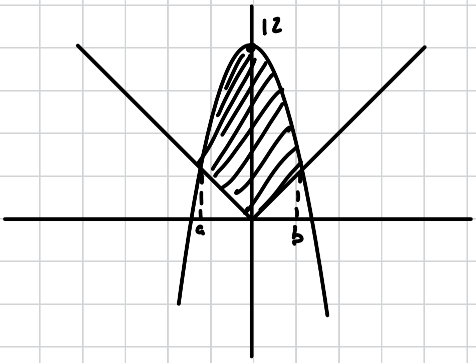
$$\int_{-3}^{1} 3-2x-x^2\,dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} = \frac{32}{3}$$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad y=0 \quad x=e \quad x=e^2$



$$A = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\, dx = [\ln|x|]_e^{e^2} = 2 - 1 = 1$$

5) $f(x) = |x| \quad g(x) = 12 - x^2$



$$A = \int_0^3 g(x) - f(x) = = 2\int_0^3 12 - x^2 - x\, dx = 2\left[12x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 =$$

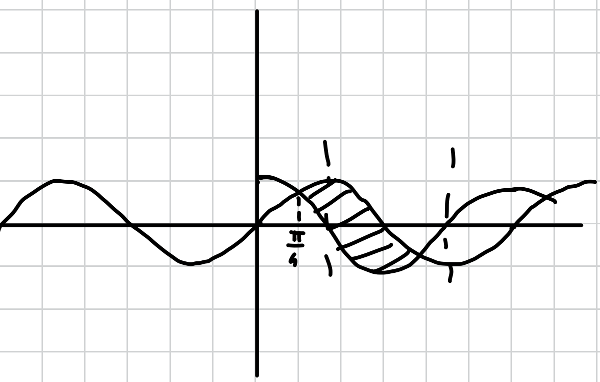
$12 - x^2 = |x|$

$-x^2 - x + 12 = 0$

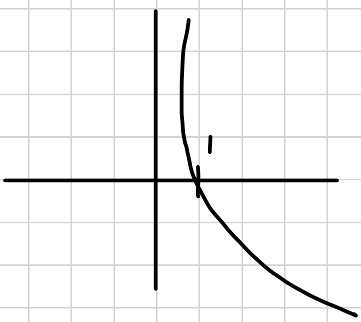
$\Delta = 1 - 4\cdot(-1)\cdot 12 = 1 - 48 = 47$

$x_{1,2} = 3$

7) $f(x) = \text{sen}\, x \quad g(x) = \cos x$



TEMA D'ESAME



$\log_a x$

$0 < a < 1$

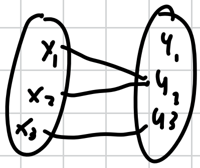
FUNZIONI IN UNA VARIABILE

30-10-2024

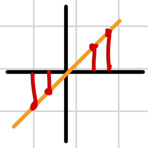
FUNZIONI IN 1 VARIABILE

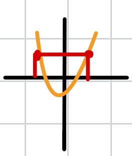
DEF: una **FUNZIONE** f di una variabile reale è un'applicazione che **associa ad ogni valore della variabile reale indipendente x un unico valore di una variabile y**.

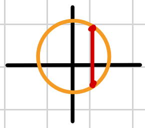
$$f: x \in \mathbb{R} \to y \in \mathbb{R} \to y = f(x)$$

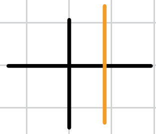


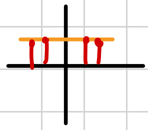
oss: un valore di y può corrispondere a più x. Non viceversa.

Es: $y = x$  sì

$y = x^2$  sì

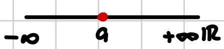
$x^2+y^2=1$  NO

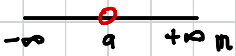
$x=4$  NO

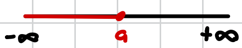
$y=4$  sì

• DOMINIO e IMMAGINE:

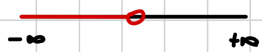
DEF: un **INTERVALLO** di $\mathbb{R}$ è un **sottoinsieme di $\mathbb{R}$** che può essere **chiuso, aperto, limitato o illimitato**:

- $x \geq a$ $x \in [a, +\infty)$ 

- $x > a$ $x \in (a; +\infty)$ 

- $x \leq a$ $x \in (-\infty; a]$ 

- $a < x < b$ $x \in (a, b)$ 

- $x < a$ $x \in (-\infty, a)$ 

- $a \leq x \leq b$ $x \in [a, b]$ 

- $x = a$ $x \in [a]$ 

DEF: **INTERVALLI CHIUSI**: compresi tra 2 valori inclusi nell'intervallo

INTERVALLI LIMITATI: tra 2 valori finiti

DOMINIO: data una funzione f il **dominio è l'insieme dei valori della variabile indipendente x per i quali f esiste/è definita.**

D_f si esprime in intervalli

Es: $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$, trovare D_f

$D_f = 1 - x^2 \geq 0$

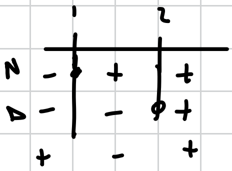
$-x^2 = -1$

$x^2 = 1 \quad x = \pm 1$  $D_f = [-1, 1]$

$-1 \leq x \leq 1$

Es: $y = f(x) = x^2 \quad Df = \mathbb{R}$

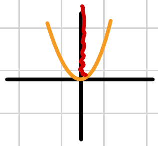
Es: $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}} \qquad \dfrac{x-1}{x-2} \geq 0 \qquad \begin{matrix} x \geq 1 \\ x > 2 \end{matrix}$



$Df = (-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$

DEF: L'IMMAGINE di una funzione I_f è l'insieme dei valori y che si ottengono dai valori del dominio della funzione. Anche l'immagine si indica con intervalli.

Es: $y = x^2$ $\qquad\qquad$ $y = \operatorname{sen} x$



$I_f = [0; +\infty) \qquad I_f = [-1; 1]$

DEF: una funzione f si dice PARI se $\forall x \in Df \to f(x) = f(-x)$
una funzione f si dice DISPARI se $\forall x \in Df \to -f(x) = f(-x)$
↳ esistono funzioni ne pari ne dispari

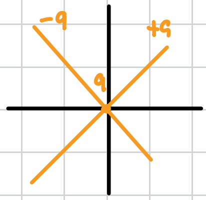
Es: $y = x^2 \quad f(-x) = x^2 = f(x)$ PARI

$y = x^3 \quad f(-x) = -x^3 = -f(x)$ DISPARI

$y = x + x^2 \quad f(-x) = -x + x^2 \neq f(-x) \text{ e } -f(x)$

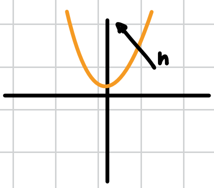
FUNZIONI ELEMENTARI:

$y = mx + q$



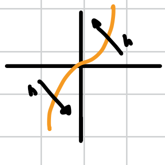
$Df = \mathbb{R}$
$I_f = \mathbb{R}$

$y = x^n$



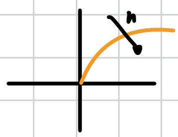
$Df = \mathbb{R}$
$I_f = [0; +\infty)$

$y = x^n$
n dispari



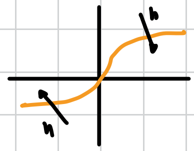
$Df = \mathbb{R}$
$I_f = \mathbb{R}$

$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
n pari



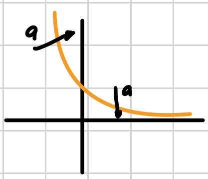
$Df = [0; +\infty)$
$I_f = [0; +\infty)$

$y = \sqrt[n]{x}$ n dispari



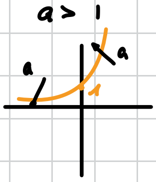
$Df = \mathbb{R}$
$I_f = \mathbb{R}$

$y = a^x$
$0 < a < 1$



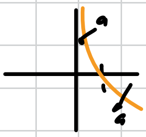
$Df = \mathbb{R}$
$I_f = (0; +\infty)$

$y = a^x$
$a > 1$



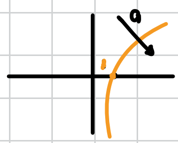
$Df = \mathbb{R}$
$I_f = (0; +\infty)$

$y = \log_a x$
$0 < a < 1$



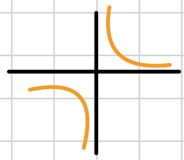
$Df = (0; +\infty)$
$I_f = \mathbb{R}$

$y = \log_a x$
$a > 1$



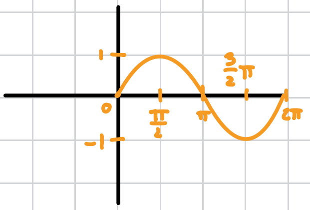
$Df = (0; +\infty)$
$I_f = \mathbb{R}$

$y = \dfrac{1}{x}$



$Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$I_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

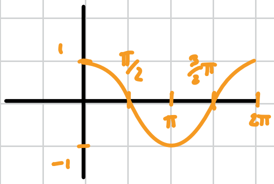
$y = \operatorname{sen} x$



$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = [-1;1]$

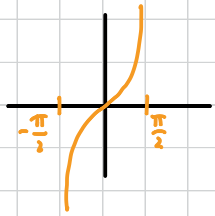
$y = \cos x$



$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = [-1;1]$

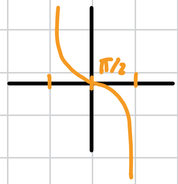
$y = \tan x$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

$I_f = \mathbb{R}$

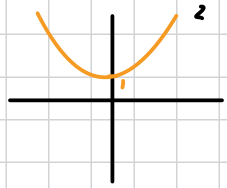
$y = \operatorname{cotg} x$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

$I_f = \mathbb{R}$

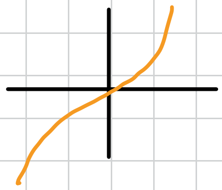
$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



$D_f = [1; +\infty]$

$I_f =$

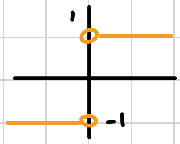
$y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = \mathbb{R}$

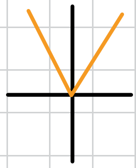
$y = \operatorname{sgn} x$
segno



$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = \{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\}$

$y = |x|$



$D_f = \mathbb{R}$

$I_f = [0; +\infty)$

OSS: $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

Proprietà esponenziali e logaritmi:

$a^x,\ a > 0$

$a^0 = 1$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$\log_a x \quad a > 0$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a (x)$

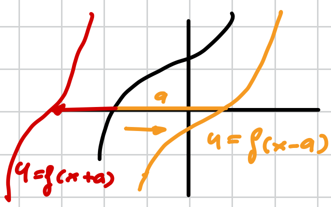
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a (x^y) = y \log_a x$

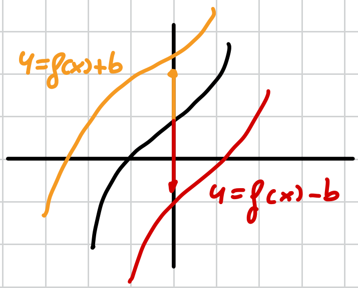
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad b > 0$

Operazioni grafiche:

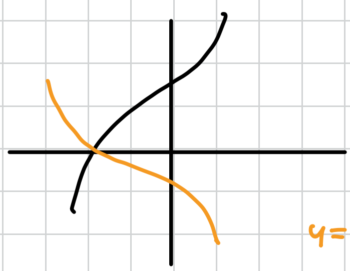
1) Traslazione orizzontale



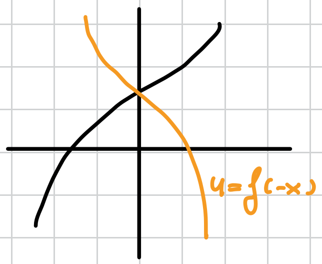
2) Traslazione verticale



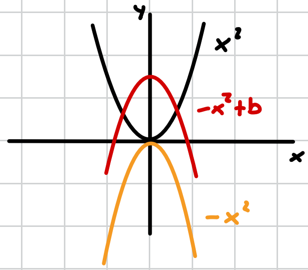
3) Simmetrie rispetto asse x



4) SIMMETRIA RISPETTO ASSE y



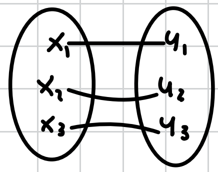
ES: fare il grafico di $y=-f(x)+b$ $b>0$ dato $f(x)=x^2$



DEF: Una FUNZIONE INVERSA

└ BIETTIVA: se e solo se $x_1=x_2 \longleftrightarrow \underset{y_1}{f(x_1)}=\underset{y_2}{f(x_2)}$

o $x_1 \neq x_2 \longleftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

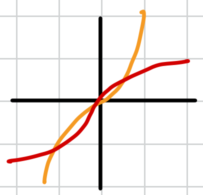


DEF: data una funzione $y=f(x)$ la sua inversa è $y=f^{-1}(x)$ se e sole se $x=f(y)$
ovvero una funzione f è invertibile se e solo se è anche biettiva
In questo caso: $\begin{cases} D_f = I_{f^{-1}} \\ D_{f^{-1}} = I_f \end{cases}$

Per invertire una funzione bisogna fare 2 passaggi:

1) verifico biettività
2) scrivere $x=f(y)$ e esplicitare rispetto y

Es: $y=f(x)=x^3$

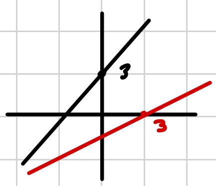


è biettiva? si

$x=f(y)=y^3 \quad y=x^{1/3}=f^{-1}(x)$

$y=f(x)=2x+3$

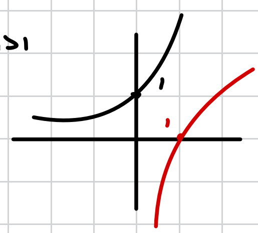
biiettiva



$x=f(y)=2y+3$

$y=\frac{x-3}{2}$

$y=f(x)=a^x \quad a>1$

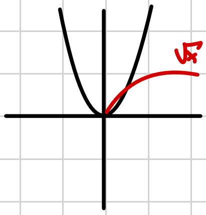


$x=a^y \quad y=\log_a x$

$y=f(x)=x^2$ NO BIETTIVA
QUINDI NO INVERSA

OSS: le funzioni periodiche non sono invertibile.
Una funzione può non essere invertibile ma può esserlo in una parte si parla di INVERSE DI FUNZIONI RISTRETTE.

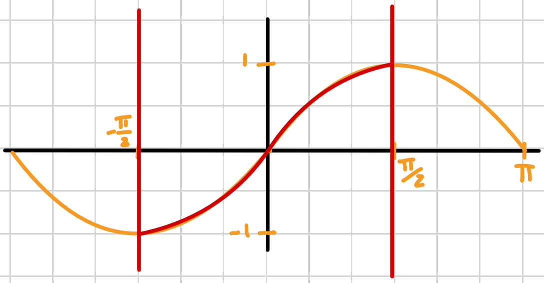
$\hookrightarrow y = x^2$



la funzione x^2 è biiettiva in 2 sottodomini : $[0;+\infty)$
$(-\infty;0]$

$x = f(y) = y^2$
$y = \sqrt{x}\,,\ x \geq 0$

Es: $y = \operatorname{sen} x$



Se considero $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\quad y = \operatorname{sen}^{-1}x = \underline{\operatorname{arcsen} x}$

OPERAZIONI FRA FUNZIONI:

Siano f e g due funzioni in x

$\hookrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\hookrightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g$

DIFFERENZA

$\hookrightarrow (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$\hookrightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g$

PRODOTTO

$\hookrightarrow (f \cdot g)(x) = f(x)\,g(x)$

$\hookrightarrow D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

DIVISIONE

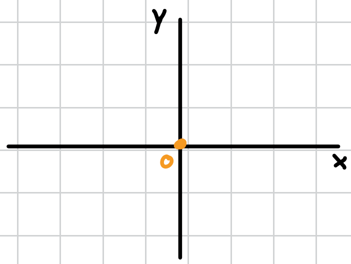
$\hookrightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$\hookrightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\}$

Es: $f(x) = \sqrt{-x}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

$f+g = \sqrt{-x} + \sqrt{x}$ $\qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g = 0 \rightarrow$ l'intersezione è 0

$(-\infty;0] \cap [0;+\infty)$



Es: $f(x) = x^2 + 2$ $\qquad g(x) = x$

$\frac{f}{g} = \frac{x^2+2}{x}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g / \{x : g(x) = 0\}$

$\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

COMPOSIZIONE FRA 2 FUNZIONI:

- $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$
- $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

Es: $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = -1-x^2$

$f \circ g = \sqrt{(-1-x^2)}$

$D_g = \mathbb{R}$

D_f = non è definita

$I_g = (-\infty; 1] \notin D_f$

$g \circ f = -1-(\sqrt{x})^2$

$D_f = [0; +\infty)$ $I_f = [0; +\infty)$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_{g \circ f} = [0; +\infty)$

OSS: $f \circ g$ posso dire che g è la funzione INTERNA e f ESTERNA

6-11-2024

Es: $f(x) = \ln x$ $g(x) = e^x - 1$

$f[g(x)] = \ln(e^x-1)$

$D_f = x > 0$

$(0; +\infty)$

DOM $= e^x - 1 > 0$

$e^x > 1$

$e^x > 1$

$x > \ln 1$ $x > 0$

$(0; +\infty)$

OSS: data una funzione $f \to f \circ f^{-1}(x) = 0$ $f[f^{-1}(x)] = x$, $\forall x \in I_f$

$f^{-1}[f(x)] = x$, $\forall x \in D_f$

Es: $f(x) = x^3$ $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$D_f = \mathbb{R}$ $I_f = \mathbb{R}$

$f[f^{-1}(x)] = x$, $\forall x \in I_f = \mathbb{R}$

$f^{-1}[f(x)] = x$, $\forall x\, D_f = \mathbb{R}$

Es: $f(x) = x^2$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

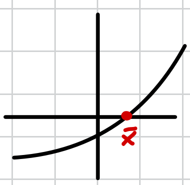
$I_f = [0; +\infty)$ $D_f = \mathbb{R}$

$f[f^{-1}(x)] = x$, $\forall x \in [0; +\infty)$

$f^{-1}[f(x)] = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- POSITIVITÀ DI FUNZIONE

1) Una funzione f è positiva in un punto $x \in D_f$ se e solo se $f(x) > 0$
2) Una funzione f è negativa in un punto $x \in D_f \iff f(x) < 0$
3) Uno 0 di una funzione è un punto $x \in D_g : f(x) = 0$



$$f(x) = \begin{cases} > 0 & x > \bar{x} \\ = 0 & x = \bar{x} \\ < 0 & x < \bar{x} \end{cases}$$

- **STUDIO DI FUNZIONI**:

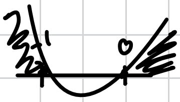
1) DOMINIO DI FUNZIONE
2) POSITIVITÀ e O DELLA FUNZIONE

Esercizi:

1) DETERMINARE IL DOMINIO

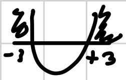
- $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

- $f(x) = \sqrt[4]{x+x^2}$ $\quad D_f = \ x+x^2 \geq 0$
  $x = 0 \quad x = -1$



$x \leq -1 \ \vee \ x \geq 0$
$(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$

- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-9}{x+5}}$ $\quad x^2 - 9 \geq 0$
  $x = \pm 3$



$x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3$

$x+5 > 0 \quad x > -5$

	-5	-3	3	
-	+	+	+	
+	+	-	+	
-	+	-	+	

$-5 \leq x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3$
$(-5; -3] \cup [3; +\infty]$

- $f(x) = \sqrt{2-|x|}$

$2-|x| \geq 0 \ \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 2+x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} -x \geq -2 \\ x \geq -2 \end{cases} \begin{cases} x \leq 2 \\ \end{cases}$ $\quad -2 \leq x \leq 2$
$D_f = [-2; 2]$

- $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|-4}$ $\quad D_f = \ |x+1|-4 \neq 0 \ \begin{cases} x+1-4 \neq 0 \\ -x-1-4 \neq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x \neq 3 \\ -x \neq 5 \quad x \neq 5 \end{matrix}$ $\quad \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\}$

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\quad D_f = \ x \neq 0$
  $1-x^2 \geq 0$
  $x^2 \leq 1$
  $x = \pm 1$

$-1 \leq x \leq 1$

	-1	0	1	
+	+	0 +	+	
-	+	+	-	
-	+	0 +	-	

$D_f = [-1; 1] \setminus \{0\}$

- Date f e g calcolate $f \circ g$ e $g \circ f$

1) $f(x) = x^2 \quad g(x) = \sqrt{x^2+1}$

$f \circ g = (\cancel{\sqrt{x^2+1}})^{\cancel{2}} = x^2+1$

$g \circ f = \sqrt{(x^2)^2+1} = \sqrt{x^4+1}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x-2} \quad g(x) = |x|+1$

$f \circ g = \sqrt[3]{|x|+1-2} = \sqrt[3]{|x|-1}$

$g \circ f = |\sqrt[3]{x-2}|+1$

- Scrivere le seguenti funzioni come composizione di funzioni più semplici

1) $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\ \underbrace{\ }_{g}$ f $\qquad f \circ g = h \qquad f = \dfrac{1}{x} \qquad g = x+1$

2) $h(x) = (1-x)+(1-x)^2$ $\quad f \circ g = h$

$f = x + x^2 \quad g = 1-x$

3) $h(x) = \sqrt{x+x^2}$ $\quad f \circ g = h$

$f = \sqrt{x} \quad g(x) = x + x^2$

• Dire se le funzioni sono pari o dispari

1) $f(x) = x - x^3$

$f(-x) = -x-(-x)^3$

$-x+x^3$

$-(x-x^3)$ DISPARI

2) $f(x) = \sqrt{|x|}$

$f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|}$ PARI

IL MODULO DI $-x$ È UGUALE AL MODULO DI x PER DEFINIZIONE

3) $f(x) = |-x^2+2x|$

$f(-x) = |-x^2-2x|$ NO PARI NO DISPARI

OSS: composizione di funzioni pari è una funzione pari
composizione di funzioni dispari è un f dispari

4) $f(x) = x^3+2$

$f(-x) = (-x)^3+2$ NO PARI

$-(x^3-2)$ NO DISPARI

FUNZIONI INVERSE

1) $f(x) = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}$

$x = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{y}$

$\mathrm{tg}x = \cancel{\mathrm{tg}}(\cancel{\mathrm{arctg}}\sqrt[3]{y})$

$\mathrm{tg}x = \sqrt[3]{y} \quad y = \mathrm{tg}^3x$

2) $f(x) = \log(1+x^3)$

$x = \log(1+y^3)$

$e^x = 1+y^3 \quad e^x - 1 = y^3$

$y = \sqrt[3]{e^x-1}$

3) $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x)$

$x = \mathrm{sen}(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}y)$

$\pi\,\mathrm{arcsen}x = \cancel{\frac{1}{\pi}}\mathrm{arctg}y$

$y = \mathrm{tg}(\pi\,\mathrm{arcsen}x)$

- determina dominio e f inverse

1) $y = \ln(x+7)$

$D_y = x+7>0 = \{x \in \mathbb{R} : x > -7\}$
$(-7;+\infty)$

$x = \ln(y+7)$

$e^x = y+7 \quad y = e^x - 7$

2) $f(x) = \mathrm{sen}\,3x$

$D_f = \mathbb{R} \longrightarrow$ trovo parte invertibile

$D_f^R = (0;\frac{2}{3}\pi]$

$0 < 3x < 2\pi$

$x = \mathrm{sen}3y$

$\frac{\mathrm{arcsen}x}{3} = 3y$

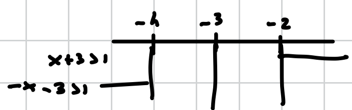
- determina i sottodomini in cui le seguenti funzioni sono positive

1) $f(x) = \log|x+3|$

$f(x) > 0 \quad |x+3| > 1$

$x+3>1 \quad x>-2$

$-x-3>1 \quad x<-4$



$(-\infty;-4[\,\cup\,]-2;+\infty)$

- calcola domini

1) $f(x) = \sqrt{e^{x-1}-1}$

$e^{x-1}-1 \geq 0$

$e^{x-1} \geq 1$

$\ln(e^{x-1}) \geq \ln 1$

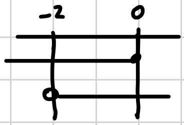
$x-1 \geq \ln 1$

$x \geq 1 \qquad [1;+\infty)$

2) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

$-x \geq 0 \quad x \leq 0$

$x > -2$



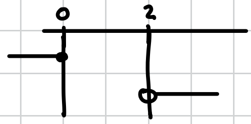
$-2 < x \leq 0$

$Df =]-2;0]$

3) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

$-x \geq 0 \quad x \leq 0$

$x > 2$

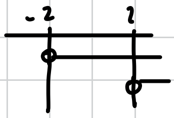


$Df = \emptyset$ è mal definita

4) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

$x > -2$

$x > 2$



$Df = (-\infty;-2[\cup]2;+\infty)$

5) $f(x) = \ln|x|$

$Df = R \setminus \{0\}$

6) $f(x) = \ln|x+3|$

$|x+3| > 0$

$x+3 > 0$

$-x-3 > 0$

$x > -3$

$x < -3 \rightarrow x \neq -3$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

6) $f(x) = \log(1-x)\log(2x-1)$

$1-x > 0 \quad x < 1$

$2x-1 > 0 \quad x > \frac{1}{2} \qquad Df = (\frac{1}{2};1)$

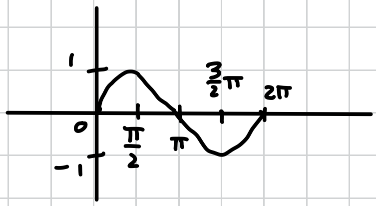
7) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}x(\cos^2 x-1)} \quad x \in [0;2\pi]$

$\operatorname{sen}x(\cos^2 x-1) \geq 0$

$\operatorname{sen}x(\cancel{\cos^2 x}-\cancel{\cos^2 x}-\operatorname{sen}^2 x) \geq 0$

$\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}^2 x) \geq 0$

$\operatorname{sen}^3 x \leq 0$

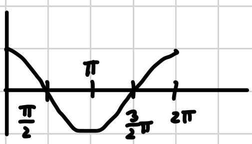


$Df = [\pi;2\pi] \cup \{0\}$

8) $f(x) = \log(\cos x) \quad x \in [0;2\pi]$

$\cos x > 0$

$Df = (0;\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi;2\pi)$

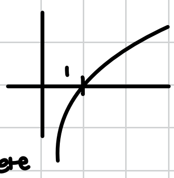


quando $f(x) > 0$

$f(x) > 0 \quad \cos x > 1$

non può essere

quindi non è mai positiva



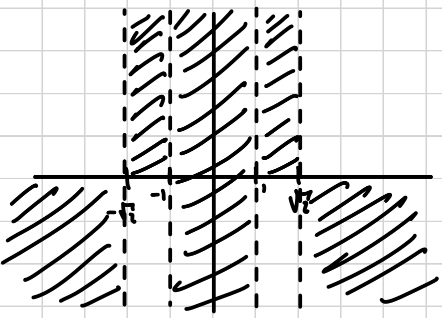
cerchiamo gli 0 di $f(x)$

$\log(\cos x) = 0 \rightarrow$ quando $\cos x = 1 \rightarrow$ in 0 e 2π

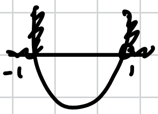
$x = 0$ e $x = 2\pi$

- studia positività e zeri e dominio

1) $f(x) = \log(x^2-1)$



1) $D_f = x^2-1>0$ $x=\pm 1$



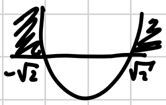
$x<-1 \cup x>1$

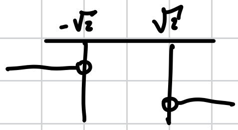
$(-\infty; -1[\cup]1; +\infty)$

2) $\log(x^2-1) \geq 0$

$x^2-1>1$

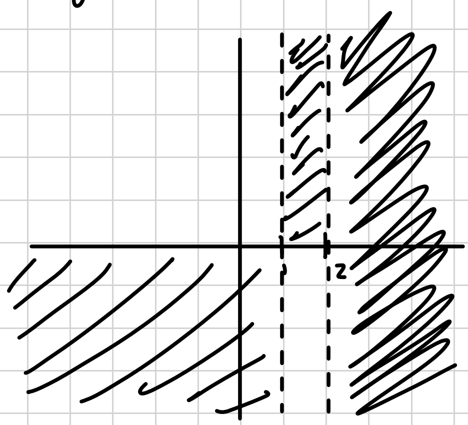
$x^2>2$





$(-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty)$

2) $f(x) = \log(2-x)$



1) $D_f = 2-x>0$

$-x>-2$ $x<2$

$D_f =]-\infty; 2[$

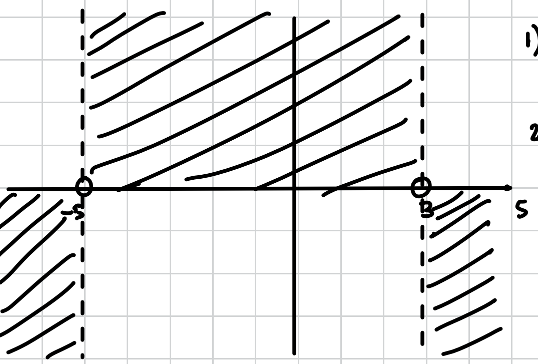
2) $2-x>1$

$-x>-1$

$x<1$

3) lo zero è 1

3) $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|-4}$



1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\}$

2) $\dfrac{1}{|x+1|-4} > 0$

$|x+1|-4>0$

$x+1-4>0$ $x>3$

$-x-1-4>0$ $-x>5$ $x<-5$ $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$

3) $\dfrac{1}{|x+1|-4} = 0$ NON ESISTE

NON HA ZERI

11-11-2026

1) $f(x) = \sqrt[4]{|x|-|x+2|}$

$|x|-|x+2| \geq 0$

$x \geq 0$

$x \geq -2$

	-2		0	
$-$		$-$		$+$
$-$		$+$		$+$

caso 1) $x \leq -2$

$-x-(-x-2) \geq 0$

$-x+x+2 \quad 2 \geq 0$ ok

caso 2) $-2 < x \leq 0$

$-x-(x+2) \geq 0$

$-x-x-2 \geq 0 \quad -2x \geq 2$

$x \leq -1$

caso 3) $x > 0$

$x-x-2 \geq 0$

$-2 \geq 0$ MAI

$D_f = \{x \leq -2 \vee -2 \leq x \leq -1\} =$

$(-\infty; -1]$

2) $f(x) = \dfrac{1}{4^x - 5 2^x + 6}$

$4^x + 5 \cdot 2^x + 6 \neq 0$

$4^x + 5 \cdot 2^x \neq -6$

$2^x = y \to 4^x = 2^x \cdot 2^x = y^2$

$y^2 + 5y + 6 \neq 0 \quad \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$ $\to 3 \neq 2^x \to x \neq \log_2 3$; $2 \neq 2^x \to x \neq \log_2 2 \neq 1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; \log_2 3\}$

3) Data $f(x) = |x^2 - 2x|$

① D_f

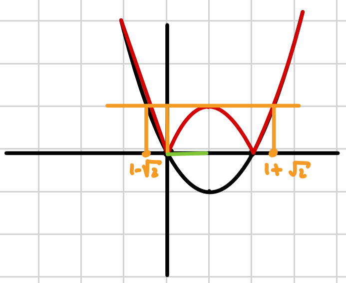
② Tracciare grafico

③ Determina l'immagine da $I_f([0;1))$

④ Contro $I_f([0;1))$

1) $D_f = \mathbb{R}$

2)



$|x^2 - 2x|$

3) $I_f([0;1)) = [0;1) \to y : y = f(x)$ con $x \in [0;1)$

4) $CI_f = ([0;1))$

$\{x : f(x) \in [0;1)\}$

$\to 1 = |x^2 - 2x|$

$1 = x^2 - 2x$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ $\to 1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$

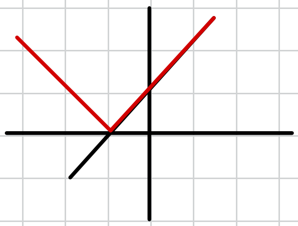
$\{x : 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}\} \setminus \{1\} =$

$= [0;1) =$

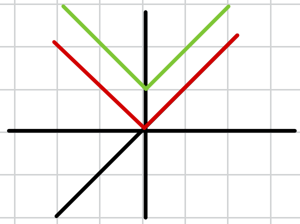
$(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}) / \{1\}$

4) Traccia grafici alcune funzioni

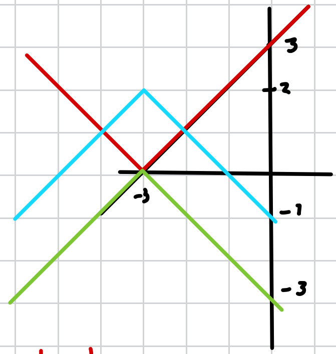
1) $f_1(x) = |x+1|$



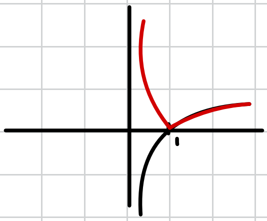
2) $f_2(x) = |x|+1$



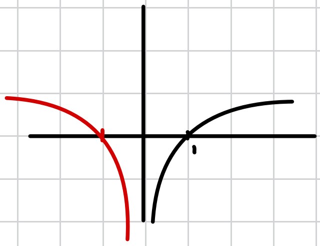
3) $f_3(x) = 2 - |x+3|$



4) $|\log x| = f_4(x)$



5) $f_5(x) = \log|x|$



6) $f_6(x) = |x+1| - 1$