Integrai - avewv

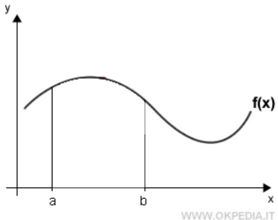
Integrali

L'integrale è un operatore che agisce sulle funzioni. Nel contesto delle funzioni reali di variabile reale si può parlare di **integrali definiti**, che associano ad una funzione l'area sottesa dal grafico su un dato intervallo, e di **integrali indefiniti**, che individua le antiderivate(o primitive) della funzione.

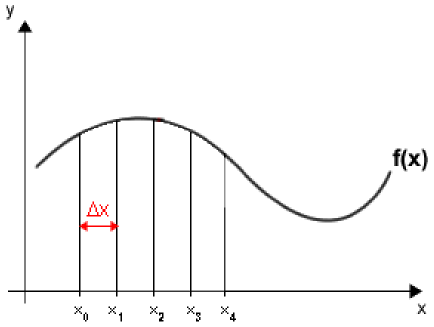
L'integrale definito

L'integrale definito di una funzione f(x) in un intervallo [a,b] è un numero reale che misura l'area S compresa tra la funzione e l'asse delle ascisse, delimitata dai due segmenti verticali che congiungono gli estremi [a,b] al grafico della funzione.

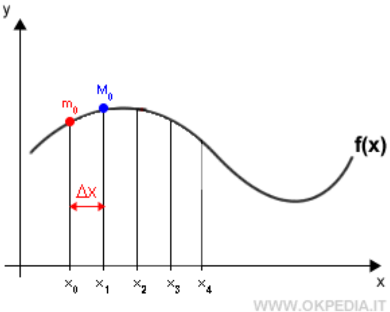
La spiegazione **dell'integrale definito** In geometria l'integrale definito è utilizzato per calcolare l'area di una figura geometrica curvilinea.



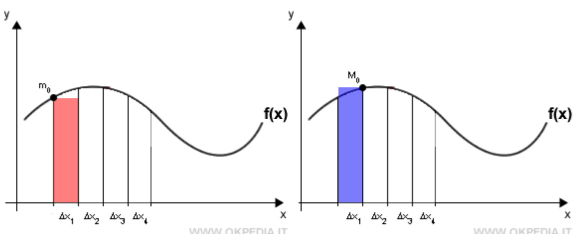
Per calcolare l'area tra il grafico di una funzione e l'ascisse in un intervallo chiuso [a,b] si suddivide la basa in intervalli più piccoli [xi,xi+1] di ampiezza costante Δx



Ciascun intervallo ha un valore minimo mi e un valore massimo Mi



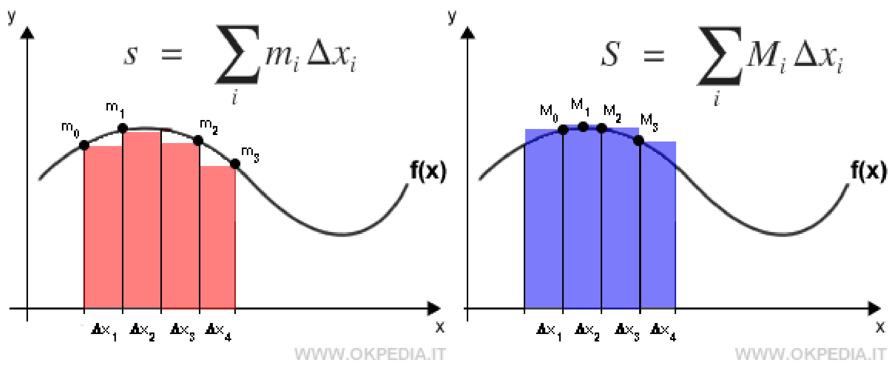
Quindi, per ogni intervallo [xi,xi+1] è possibile calcolare l'area del rettangolo fino al valore minimo miΔxi e l'area del rettangolo fino al valore massimo MiΔxi.



Sommando le superfici dei rettangoli si ottengono due aree: La somma inferiore s è la somma delle aree degli intervalli miΔxi. La somma superiore S è la somma delle aree degli intervalli MiΔxi.

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i \qquad S = \sum_i M_i \Delta x_i$$

L'area della figura curvilinea è compresa tra la somma inferiore s e la somma inferiore S.



Facendo tendere a zero gli intervalli [xi,xi+1] (le basi dei rettangoli) la somma inferiore e superiore convergono all'integrale definito I, ossia all'area della figura curvilinea.

$$\lim_{\Delta x \to 0} s = \lim_{\Delta x \to 0} S = I$$

Al ridursi della base Δx i rettangoli diventano sempre più piccoli, riducendo la presenza delle superfici in difetto o in eccesso intorno al grafico. L'integrale definito della funzione f(x) nell'intervallo [a,b] è indicato con la seguente notazione

$$I = \int_a^b f(x) \; dx$$

Il simbolo dell'integrale ∫ rappresenta la somma dall'estremo sinistro (a) all'estremo destro (b) delle aree dei rettangoli. L'area di ogni rettangolo è determinata da f(x)·dx, dove f(x) identifica l'altezza e dx la larghezza (base) dei rettangoli infini

$$\int_a^b f(x) \; dx = F(b) - F(a)$$

In pratica, l'integrale definito è l'incremento di una qualsiasi funzione primitiva di f(x) dall'estremo sinistro (a) all'estremo destro (b).

Teoremi

- Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato vi è integrabile.
- Se f è integrabile tra a e b ,è integrabile tra c e d per ogni c e d compresi tra a e b.
- (Teorema della media per le funzioni limitate).Se f(x) è limitata ed integrabile tra a e b , detti m ed M rispettivamente i suoi estremi inferiore e superiore, risulta:

  $$m(b-a) \leq \int_b^a f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

- (Teorema della media per le funzioni continue).Se f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b], esiste in tale intervallo almeno un punto c per il quale risulta:

  $$f(c)(b-a) = \int_b^a f(x)\,dx$$

L'integrale indefinito

La primitiva

La primitiva F(x) di una funzione reale f(x) è un insieme di funzioni (o famiglia di funzioni) che hanno la derivata prima F'(x) uguale a f(x) per ogni valore di x del dominio.

Esempio. La funzione reale f(x)=2x può essere ottenuta derivando la funzione F(x)=x2. La derivata prima di F'(x) è 2x. Quindi, la funzione F(x) è una funzione primitiva di f(x).

Le funzioni f(x) che hanno una primitiva sono dette funzioni integrabili.

Quando una funzione f(x) è integrabile, vuol dire che è la derivata di un'altra funzione F(x).

Una qualsiasi funzione reale f(x) non ha soltanto una primitiva bensì infinite primitive, perché può essere ottenuta derivando infinite funzioni che differiscono tra loro soltanto per una costante d.

Teorema. Se due funzioni F(x) e G(x) sono primitive della stessa funzione f(x), allora le due funzioni differiscono tra loro per una costante c.

Il teorema di Torricelli-Barrow

-è un teorema che stabilisce la continuità della funzione integrale, e sotto opportune ipotesi la sua derivabilità; inoltre, fornisce una formula di calcolo detta formula fondamentale del calcolo integrale. Permette di calcolare esplicitamente gli integrali definiti utilizzando il calcolo di primitiva di una funzione.

Sia f(x) integrabile sull'intervallo I .Fissato cmq c nell'intervallo , per ogni valore di x in I è possibile considerare l'integrale della f tra c ed x ; il risultato dell'integrazione dipendendo da x. Si ottiene cosi una funzione della variabile indipendente x , che potremo denotare con il simbolo ${}_cG(x)$ e che varrà dunque, per definizione:

Teorema

Data la funzione $f(x):[a;\ b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Si definisce funzione integrale di f la funzione F tale che

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ \text{con}\ x \in [a;\ b]$$

Se f è limitata, si ha che F è continua in $[a;\ b]$ e se f è continua in $[a;\ b]$ allora F é derivabile per ogni $x \in [a;\ b]$ e si ha:

$$F'(x) = f(x),\ \ F(a) = 0$$

Questo teorema evidenzia due proprietà fondamentali: la prima che $F(x)$ é una **primitiva** di $f(x)$, la seconda che se la **funzione integrale** assume nell'estremo superiore di integrazione lo stesso valore del primo, essa vale zero cioé $F(a) = 0$.

Ora deriviamo da questo teorema il procedimento per il calcolo dell'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$.

Prima bisogna trovare una primitiva di $f(x)$ che indichiamo con $F(x)$, quindi dobbiamo calcolare la differenza tra i valori assunti dalla $F(x)$ negli estremi di integrazione a e b; in definitiva scriviamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

oppure

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

Partendo dal teorema di **Torricelli-Barrow** possiamo aggiungere che, se conosciamo il grafico di $f(x)$, il grafico di $F(x)$ avrà le seguenti caratteristiche:

1. gli zeri di f sono punti a tangente orizzontale per F.
2. se f é dispari F è pari
3. dove la f é negativa (positiva) la F é decrescente (crescente)

se $a = 0$ e se f é pari F sarà dispari.

Se f(x) è continua in [a,b] ed F(x) è una sua primitiva qualunque, risulta:

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

<u>Integrazione per parti</u>:

$$\int f'(x)*g(x)\,dx = f(x)*g(x) - \int f(x)*g'(x)\,dx$$

<u>Integrali impropri:</u>

In analisi matematica, l'**integrale improprio** o **generalizzato** è il limite di un integrale definito al tendere di un estremo di integrazione (o entrambi) ad un numero reale oppure all'infinito.

Gli integrali impropri si utilizzano per rendere calcolabili integrali riguardanti intervalli illimitati e/o funzioni non limitate, che non sono trattabili con l'integrale di Riemann. Esso richiede infatti la limitatezza sia per l'intervallo di integrazione, sia per la funzione integranda.

Definizione [modifica | modifica wikitesto]

Un integrale improprio è un limite della forma:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

oppure:

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Un integrale è improprio anche nel caso in cui la funzione integranda non è definita in uno o più punti interni del dominio di integrazione.